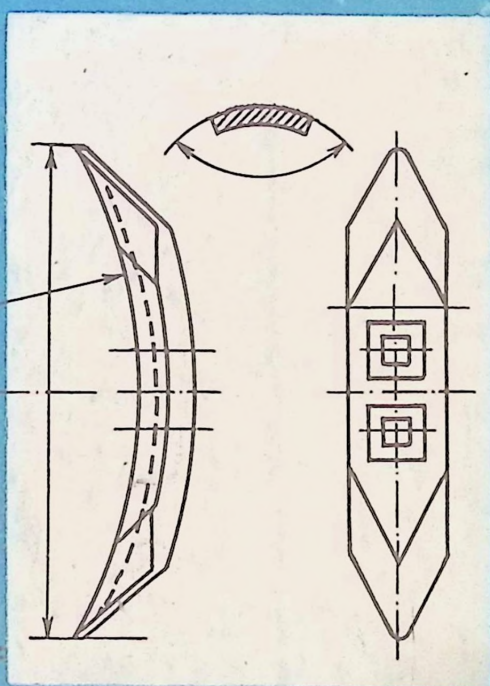


178449

Р.И. Байметов, Н.М. Флайшер

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ РАБОЧИХ ОРГАНОВ ПОЧВООБРАБАТЫВАЮЩИХ МАШИН



631.3
Б-18

78449

63/31

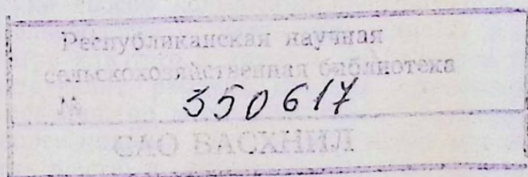
Б СРЕДНЕАЗИАТСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ ВАСХНИЛ

СРЕДНЕАЗИАТСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ МЕХАНИЗАЦИИ
И ЭЛЕКТРИФИКАЦИИ СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА (САИМЭ)

Р. И. БАЙМЕТОВ, Н. М. ФЛАЙШЕР

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ РАБОЧИХ ОРГАНОВ ПОЧВООБРАБАТЫВАЮЩИХ МАШИН

Под редакцией академика ВАСХНИЛ
Г. М. РУДАКОВА



ТАШКЕНТ
ИЗДАТЕЛЬСТВО «ФАН» АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
1991

УДК 631.3:631.171:631.512

Байметов Р. И., Флайшер Н. М. Оптимизация параметров рабочих органов почвообрабатывающих машин. Ташкент: Фан, 1991. 140 с.

Монография содержит результаты изысканий, позволивших усовершенствовать средства механизации для предпосевной обработки почвы на повышенных скоростях в зоне хлопководства. Исследовано взаимодействие почвенных масс с рыхлительной лапой чизель-культиватора во время выполняемого им рабочего процесса. Обоснованы геометрические параметры рыхлительной лапы минимального тягового сопротивления.

Для научных работников, конструкторов, преподавателей, аспирантов и студентов.

Табл. 1. Ил. 18. Библпогр. 29.

Рецензент:

доктор технических наук Х. Т. ТУРАНОВ

Б 3703030000—175
М 355 (04) —91

159 -90

© Издательство «Фан» Академии наук
Республики Узбекистан 1991 г.

ISBN 5-648-00672-1

ВВЕДЕНИЕ

В увеличении производства хлопка-сырца, зерна и других продуктов земледелия первостепенное значение приобретает внедрение в практику современной сельскохозяйственной техники для выполнения технологических процессов на высоком уровне, при малой энергоемкости и минимальных затратах труда и средств.

Среди мер, способствующих решению этой народнохозяйственной задачи, важное место занимает повышение агротехнического уровня возделывания хлопчатника и прежде всего — улучшение предпосевной обработки почвы, так как ее качественное выполнение является необходимой предпосылкой получения высокого урожая.

В зоне хлопководства оптимальные с агротехнической точки зрения сроки проведения предпосевной обработки почвы очень сжаты [4, 15]. Следствие их несоблюдения — потеря почвенной влаги и запоздалый посев, что приводит к изреженности всходов и сокращению вегетационного периода, а тем самым — к снижению урожая хлопка-сырца.

Для соблюдения сроков посева хлопчатника, гарантирующих (в сочетании с другими агротехническими мероприятиями) высокий урожай, необходимо увеличение производительности почвообрабатывающих машин.

Классический способ повышения производительности в механизации растениеводства — увеличение ширины захвата или скоростей агрегатов или того и другого. Это требует (при использовании существующих рабочих органов почвообрабатывающих машин) применения, по мере возрастания размеров и скоростей машин, все более мощных двигателей и более массивных деталей. Так, для пяти-, шести- и семикорпусного плугов отношение массы к ширине захвата соответственно на 30, 45 и 70% больше, чем для трехкорпусного, удельная металлоемкость которого минимальна.

Пахотные тракторы, применяемые в зоне хлопководства, позволяют проводить как основную, так и предпосевную обработку почвы со скоростью 2,2...3,3 м/с. Однако при работе чизель-куль-

тиватора ЧКУ-4 (а также других почвообрабатывающих машин, используемых при возделывании хлопчатника) на скоростях, превышающих 2,2 м/с, намного ухудшаются агротехнические показатели: почва плохо рыхлится, рабочие органы выглубляются и отбрасывают в сторону почвенные комки и т. д. Кроме того, резко увеличивается тяговое сопротивление.

Проблема снижения тягового сопротивления, испытываемого почвообрабатывающими машинами во время выполняемых ими рабочих процессов, хорошо известна. Достаточно указать на то, что около 18% годовой добычи нефти расходуется на обработку почвы, т. е. в основном на преодоление сил тягового сопротивления. Острота этой проблемы усугубляется тем, что при действующей технологии возделывания сельскохозяйственных культур рост производительности труда связан с дальнейшим возрастанием энергетических затрат даже без расширения посевных площадей. Причиной служит то обстоятельство, что при существующей системе машин для растениеводства повышение их производительности достигается в основном посредством увеличения рабочих скоростей или ширины захвата, а динамическое сопротивление, испытываемое почвообрабатывающей машиной в ходе совершаемого ею рабочего процесса, является квадратичной функцией скорости и возрастающей линейной функцией ширины захвата. Энергия, потребляемая агрегатом во время работы, — кубическая функция его рабочей скорости.

Таким образом, проблема повышения производительности почвообрабатывающих машин сводится к задаче поиска той геометрической формы их рабочих органов, которая позволяет увеличить до 3,3 м/с скорость агрегатов, избегая при этом отрицательных последствий. Данная проблема является, следовательно, задачей совершенствования рабочих органов и прежде всего — создания рабочих органов минимального тягового сопротивления.

Основные почвообрабатывающие машины, используемые в Средней Азии при подготовке почвы к посеву хлопчатника, — чизель-культиваторы и зубовые бороны.

За последние 50 лет предприняты многочисленные попытки совершенствовать конструкцию чизель-культиватора. С этой целью его конструкция подвергалась неоднократным изменениям. Усовершенствования затронули, однако, лишь схему орудия в целом, а также отдельные узлы. Что касается рабочего органа — рыхлительных лап, то в течение последних сорока лет он по существу оставался неизменным. Обоснованных рекомендаций по созданию предназначенной для работы со скоростью 2,2...3,3 м/с энергосберегающей рыхлительной лапы с геометрическими параметрами, обеспечивающими высокую проходимость агрегата и достаточную степень рыхления почвы, нет.

Такие рекомендации могут быть получены лишь исходя из знания закономерностей взаимодействия почвенной массы и рыхлительной лапы, имеющего место во время совершаемого машиной

рабочего процесса. Это взаимодействие, однако, мало изучено: нет даже ответа на вопрос о законе распределения сил давления почвы на рабочую поверхность.

В Среднеазиатском ордена Трудового Красного Знамени научно-исследовательском институте механизации и электрификации сельского хозяйства (САИМЭ) и во Всесоюзном ордена Трудового Красного Знамени научно-исследовательском институте механизации сельского хозяйства (ВИМ) выполнены многолетние теоретические и экспериментальные исследования, приведшие к созданию новой рыхлительной лапы, обеспечивающей — при работе со скоростью до 3,3 м/с — качественную подготовку почвы к посеву хлопчатника. Будучи рассчитана и спроектирована как рабочий орган минимального тягового сопротивления, данная рыхлительная лапа менее энергоемка, чем любое одноименное, обладающее такими же размерами орудие. Наличие этого рабочего органа позволяет считать решенной задачу создания чизель-культиватора, могущего быть агрегатированным с перспективным гусеничным трактором класса тяги 5 типа Т-250 (его диапазон рабочих скоростей 2,7...3,3 м/с), выпуск которого начинается в тринадцатой пятилетке.

Настоящая монография посвящена систематическому изложению указанных выше изысканий. Она рассчитана на научных работников, занятых проблемами механизации сельскохозяйственного производства, инженеров-конструкторов и расчетчиков почвообрабатывающих машин, преподавателей, аспирантов и студентов старших и средних курсов факультетов механизации сельского хозяйства.

Исследование (методами динамики) взаимодействия стоек и рыхлительных лап с почвой во время совершаемого ими технологического процесса, а также теоретическое изучение свойств рабочих поверхностей основывается на дифференциальной геометрии. Так называется математическая наука, исследующая произвольные кривые и поверхности путем применения математического анализа. Ее изучение не предусмотрено учебными планами факультетов механизации сельского хозяйства. Современным учебникам дифференциальной геометрии (они рассчитаны на студентов механико-математических факультетов университетов) свойствен высокий уровень математической абстракции при изложении материала; они утратили простоту и прикладную направленность, характерную для прежних (являющихся теперь библиографической редкостью) книг по дифференциальной геометрии и стали недоступными лицам, закончившим факультеты механизации сельского хозяйства. Стремясь сделать монографию доступной широкому кругу читателей и освободить их от необходимости обращения к другой литературе, авторы приводят в гл. I (в сжатой и вместе с тем доступной и научно строгой форме) используемые в дальнейшем сведения по дифференциальной геометрии; они изложены в том виде, в котором находят приме-

жение в исследовании движения почвенных частиц по рабочим поверхностям почвообрабатывающих машин в течение выполняемого ими технологического процесса.

Авторы надеются, что читатели, проработавшие книгу, убедятся в эффективности аналитических способов проектирования рабочих органов минимальной энергоемкости и почувствуют потребность в применении этих методов к созданию новых сельскохозяйственных машин и орудий.

Авторы выражают глубокую благодарность кандидатам технических наук С. А. Ма (ВИМ), М. Мирахматову (ТИИИМСХ) и А. Тухтакузиеву (САИМЭ) за сотрудничество и полезные обсуждения материала.

Глава 1

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ РАБОЧИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ РЫХЛИТЕЛЬНЫХ ЛАП

1.1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Теоретическое изучение движения¹ рыхлительной лапы в почвенном слое и оптимизация ее параметров требуют применения сведений из области дифференциальной геометрии, которыми исследователи, занятые созданием новых и совершенствованием существующих рабочих органов почвообрабатывающих машин, как правило, не владеют. В научной литературе эти сведения излагаются в форме, недоступной большинству этих исследователей и не позволяющей усмотреть связь дифференциальной геометрии с проблемой взаимодействия рабочих органов почвообрабатывающей машины с почвой, происходящего в ходе выполняемого ими технологического процесса. Данные теоретические сведения приводятся ниже, в доступном для инженера виде и вместе с тем — со строгими обоснованиями. Материалу придана та форма, в которой он применяется в дальнейшем. Наряду с этим перечисляются используемые в последующем обозначения.

1. Теоретико-множественная символика и терминология, используемые при аналитическом исследовании рабочих поверхностей. Под множеством подразумевается совокупность каких-либо предметов (например, чисел, точек, векторов, функций, кривых, поверхностей и т. д.). Вместо слова «множество» применяют и равнозначные ему термины «система», «семейство», «совокупность» и т. п. Будем обозначать множества, как правило, буквами M и N , иногда оснащенными индексами (например M_0, M_1, M_i и т. п.). Предметы, входящие в состав множества, называются его элементами. Если a — элемент множества M , то пишут $a \in M$ (это читается « a принадлежит множеству M »; $\in$ обозначает знак принадлежности). Вместо $a \in M$ и $b \in M$ принята запись $a, b \in M$. Пусть x — переменная; тогда $x \in M$ означает, что каждое ее значение — элемент множе-

¹ Всюду в дальнейшем под движением или перемещением почвообрабатывающей машины или ее рабочего органа будем подразумевать движение во время совершаемого ими рабочего процесса.

ства M (в этом случае говорят, что x пробегает множество M). Предложение « a не принадлежит множеству M » записывается следующим образом: $a \notin M$.

Множество, состоящее из элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$, и только из них, обозначается через $\{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ (многоточием заменены невыписанные элементы). Аналогичный способ записи может быть использован и применительно к некоторым множествам, количество элементов которых бесконечно. Например, совокупность всех натуральных (т. е. целых положительных) чисел может быть записана в виде $\{1; 2; \dots; n-1; n; n+1; \dots\}$ или короче $\{1; 2; \dots; n; \dots\}$, а множество всех целых чисел — $\{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$. Для обозначения этих совокупностей введены буквы N и Z :

$$N = \{1; 2; \dots\},$$

$$Z = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}.$$

Знак равенства выражает здесь, что стоящий в левой части символ служит сокращенным обозначением множества, указанного в правой части. Пусть $m_0, n_0 = \text{const}$. Записи $m_0 \in N$ и $n_0 \in Z$ читаются тогда « m_0 — натуральное число» и « n_0 — целое число». Если k — переменная, то $k \in N$ и $k \in Z$ означают, что k пробегает множества N или Z соответственно.

Пусть каждый элемент множества N является одновременно элементом множества M . Тогда пишут $N \subset M$ и называют N подмножеством или частью множества M ; говорят также, что N содержится в M или что M содержит N . Высказывание $N \subset M$ означает, следовательно, что если $x \in N$, то $x \in M$; это записывается следующим образом: $(x \in N) \Rightarrow (x \in M)$. Однако $(x \in M) \Rightarrow (x \in N)$, вследствие чего $M \subset N$, т. е. одним из подмножеств любого множества M будет M (каждое множество содержит само себя в качестве подмножества).

Соотношения $N \subset M$ и $M \subset N$ могут выполняться одновременно (это имеет место тогда и только тогда, когда каждый элемент множества N принадлежит также множеству M , и наоборот). В этом случае пишут $M = N$ и называют множества M и N равными. Понятие равенства множеств позволяет утверждать, что если $N \subset M$, то не исключен случай $N = M$.

Совокупность всех элементов множества M и всех элементов множества N обозначается через $M \cup N$ и называется объединением (или суммой) этих множеств. Символ $\cup$ называется знаком объединения. Если, например, $[AB]$ и $[BC]$ — произвольные дуги (понятия кривой и дуги знакомы читателю из курса анализа; они рассматриваются подробно в пп. 2.1...2.3), то $[AB] \cup [BC]$ означает кривую, состоящую из $[AB]$ и $[BC]$.

Аналогично определяется объединение множеств $M_1, M_2, \dots, M_n$. Оно обозначается через $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n$ или короче $\bigcup_{k=1}^n M_k$. Здесь $n = \text{const} \in N$, причем $n > 1$, а k пробегает множество $\{1; 2; \dots; n\}$.

Если $x_0 \in M$, то под $M \setminus \{x_0\}$ подразумевается множество, получаемое из M путем исключения элемента x_0 и только его. Запись $x \in M \setminus \{x_0\}$ означает, что переменная x пробегает множество M , исключая элемент x_0 .

Совокупность всех рациональных и иррациональных чисел обозначается через R и называется множеством всех действительных или вещественных чисел. Его геометрической интерпретацией служит множество всех точек числовой прямой (ее именуют также координатной прямой или числовой осью), обозначаемое тоже через R . Выражения «действительное число» и «точка числовой прямой» равнозначны. Запись $a = \text{const} \in R$ читается « a — вещественная постоянная», « a — действительное число» или « a — фиксированная точка координатной прямой». Аналогичный смысл имеет соотношение $a, b = \text{const} \in R$. Под t_0, t_1, t_2, T и т. п. будем подразумевать в дальнейшем вещественные постоянные, либо обладающие размерностью времени, либо безразмерные.

Пусть $a, b = \text{const} \in R$, причем $a < b$. Множество всех действительных чисел x , удовлетворяющих условию $a \leq x \leq b$, называется отрезком (точнее — числовым отрезком) или сегментом, или замкнутым числовым промежутком с концами a и b ; он обозначается через $[a; b]$. Если $x_0 = \text{const} \in R$, причем $a < x < b$, (следовательно, $x_0 \neq a$ и $x_0 \neq b$), то x_0 именуют внутренней точкой отрезка $[a; b]$. Совокупность всех вещественных x таких, что $a < x < b$, называется интервалом, или открытым числовым промежутком с концами a и b и обозначается через $]a; b[$. Он представляет собой множество всех внутренних точек сегмента $[a; b]$. Отрезок содержит свои концы, а интервал — нет: $a, b \in [a; b]$, но $a, b \notin]a; b[$.

Множество всех x , удовлетворяющих условию $a < x \leq b$, обозначается символом $]a; b]$ и называется открытым слева и замкнутым справа числовым промежутком с концами a и b ; согласно этому определению $a \notin]a; b]$, но $b \in]a; b]$. Аналогично этому, под $[a; b[$ (замкнутый слева и открытый справа интервал) подразумевается совокупность всех вещественных x таких, что $a \leq x < b$.

Для множества всех действительных x , больших или равных числу a ($x \geq a$), введено обозначение $[a; +\infty[$ и название «замкнутый слева и неограниченный справа числовой промежуток» или «замкнутый слева числовой луч», или «замкнутая слева числовая полупрямая». Под $]a; +\infty[$ (открытый, но ограниченный слева и неограниченный справа интервал) подразумевается совокупность всех x , удовлетворяющих условию $x > a$. Общеприняты также обозначения R_+ вместо $]0; +\infty[$ и $\bar{R}_+$ вместо $[0; +\infty[$.

Ряд свойств функции, определенной в некотором числовом промежутке, остается в силе независимо от того, является ли этот интервал открытым или замкнутым, ограниченным или неограниченным. Будем говорить в таком случае, что данный промежуток произволен, и обозначать его через I ; не исключено и совпадение интервала I со всей числовой прямой.

Пусть $x_0 = \text{const} \in R$. Окрестностью точки x_0 называется каждый открытый ограниченный промежуток, содержащий число x_0 . Легко видеть, что любой интервал вида $]x_0 - \varepsilon_1; x_0 + \varepsilon_2[$ (где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$) является окрестностью точки x_0 . Обычно полагают $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ и называют промежуток $]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[$ ε -окрестностью (или, если это не может стать причиной неясности, окрестностью) точки x_0 . Будем писать также $U(x_0; \varepsilon)$ вместо $]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[$.

Пусть a, b и x_0 — действительные числа, подчиненные единственному условию $a < x_0 < b$. Интервалы $]a; x_0[$ и $]x_0; b[$ называются смежными, а x_0 — их общей граничной точкой или их общим концом. Говорят также, что x_0 отделяет эти промежутки.

2. Обозначения функций и независимых переменных. Пусть все значения переменной² — действительные числа. Она называется тогда вещественной (или действительной) переменной. В дальнейшем встречаются только вещественные переменные, причем каждой из них приписывается определенный геометрический или физический смысл. В зависимости от того, обладает ли аргумент размерностью длины (отсчитываемой вдоль некоторой линии) или времени, будем обозначать его через s или t . В последнем случае назовем его временной переменной.

Функция называется числовой или скалярной, если все ее значения — числа, и векторной (или вектор-функцией), если все они — векторы. В тех случаях, когда это не может стать причиной неясности, вместо «векторная функция» может быть использован термин «функция». Будем записывать числовые и векторные функции одной независимой переменной соответственно в виде $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $\vec{r} = \vec{r}(s)$ и т. п. (вместо обозначений типа $x = f(t)$, $y = g(t)$, $\vec{r} = \vec{f}(t)$, $\vec{r} = \vec{g}(s)$, требующих введения дополнительных букв). Применяется также выражение «функция f » вместо «функция $f(x)$ (или $f(t)$, $f(s)$ и т. п.)».

Область определения (ее называют также областью задания) функции f обозначается через $D(f)$; в случае векторной функции $\vec{r}$ пишут соответственно $D(\vec{r})$. Запись $t_0 \in D(f)$ означает, что в точке $t = t_0$ функция $f(t)$ определена.

² Вместо «независимая переменная» используется также термин «аргумент».

Первая и вторая производные функции временной переменной обозначаются соответственно через $\dot{x} = \dot{x}(t)$, $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(t)$, $\ddot{x} = \ddot{x}(t)$ и $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}(t)$. Если аргумент имеет размерность длины, то дифференцирование записывается обычным образом

$$\left(x'(s) = \frac{dx}{ds}, x''(s) = \frac{d^2x}{ds^2}, \vec{r}'(s) = \frac{d\vec{r}}{ds}, \vec{r}''(s) = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right).$$

3. Классы функций. В дальнейшем важную роль играют классы функций. Множество всех скалярных или векторных функций одной переменной, определенных в промежутке I и непрерывных в нем, обозначается через $C(I)$ (эта запись читается: «класс C — все большое C в (или на) промежутке I »). Например, $C([a; b])$ (где $a, b = \text{const} \in R$, $a < b$) — это совокупность всех функций одного аргумента, непрерывных в интервале $]a, b[$. Вместо $C([a; b])$ («класс C — все большое C на отрезке $[a; b]$ ») пишут $C[a; b]$; в случае любых других промежутков круглые скобки не опускаются. Запись $f \in C(I)$ означает, что функция f определена и непрерывна во всем интервале I .

Множество всех функций одной независимой переменной, определенных в промежутке I , непрерывных и непрерывно дифференцируемых в нем (т. е. обладающих в каждой его точке непрерывной производной первого порядка) обозначается через $C^1(I)$ (это читается «класс C — все большое один C в (или на) интервале I »; единица, входящая в данное выражение, является не показателем степени, а верхним индексом). Утверждение «функция f непрерывна и непрерывно дифференцируема во всем промежутке I » записывается следующим образом: $f \in C^1(I)$.

Класс $C^1(I)$ содержится целиком в классе $C(I)$, являясь его подмножеством: $C^1(I) \subset C(I)$. Действительно, функция, дифференцируемая в промежутке I (т. е. принадлежащая классу $C^1(I)$), непрерывна в нем (т. е. входит в класс $C(I)$). Обратное утверждение неверно, так как непрерывная в точке x_0 функция $f(x)$ может не иметь производной при $x = x_0$.

Пусть m — любое натуральное число, большее единицы. Класс $C_m(I)$ (« C — все большое m на интервале I ») состоит из всех функций, m раз непрерывно дифференцируемых в промежутке I ; запись $f \in C_m(I)$ означает, что функция f непрерывна в интервале I и обладает в каждой его точке непрерывными производными до m -го порядка включительно.

Из соотношения $f \in C^2(I)$ следует, что $f \in C^1(I)$, значит, $C^2(I) \subset C^1(I)$; обратное неверно, так как если $f'(t_0)$ существует, то $f''(t_0)$ может не существовать. Очевидно также следующее: если $f \in C^2(I)$, то $f' \in C^1(I)$.

В тех случаях, когда это не может привести к неясности, вместо $C(I)$ и $C^m(I)$ пишут соответственно C и C^m . Например, запись $f \in C^2$ допускает следующую формулировку: функция f непрерывна

и обладает непрерывными производными первого и второго порядков во всей ее области определения. Аналогичное относится к соотношениям $f \in C$ и $f \in C^m$.

Принадлежность функции классу C^1 не означает, что она не входит в C^2 (действительно, существование первой производной не влечет за собой отсутствие второй). Соотношение $f \in C^1$ должно быть понято следующим образом: при рассмотрении данного вопроса предполагается лишь наличие непрерывной производной первого порядка функции f , а существование ее производных второго и более высоких порядков не является необходимым.

4. Обозначения геометрических понятий и свойства векторных операций, используемые в дальнейшем. Если A и B — произвольные несовпадающие точки, то (AB) — проходящая через них прямая, $[AB]$ — определяемый ими отрезок, $|AB|$ — его длина, (AB^+) — исходящий из точки A луч, направленный от A к B , $\vec{AB}$ — вектор с началом A и концом B , а $|\vec{AB}|$ — абсолютная величина (длина или модуль) этого вектора. Пусть линия (AB) , расположенная в плоскости, оснащенной прямоугольной системой координат xOy , не совпадает с осью абсцисс. Под (AB^+) или (BA^+) будем подразумевать луч прямой (AB) , расположенный в полуплоскости, определяемой условием $y \geq 0$. Прямые, в частности оси координат, будут обозначаться и с помощью записей вида (l) и $(0x)$, а луч прямой (l) , лежащий в верхней полуплоскости, и положительный луч оси абсцисс — через (l^+) и $(0x^+)$ соответственно. Символ $\angle ABC$ означает выраженную в радианах величину меньшего угла между лучами (BA^+) и (BC) , а $\angle(0x^+, l^+)$ — радианную меру меньшего из углов, образуемых лучами $(0x^+)$ и (l^+) (обозначим его через $\angle(0x^+, l^+)$).

В силу этого определения

$$0 \leq \angle(0x^+, l^+) \leq \pi, \quad (1.1)$$

как бы ни была расположена прямая (l) . Кроме того,

$$\angle(0x^+, AB^+) = \angle(0x^+, BA^+). \quad (1.2)$$

Ломаную линию с вершинами $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ и A_n запишем в виде $[A_1 A_2 \dots A_n]$.

Плоскость, в которой задана неподвижная прямоугольная правая система координат xOy , обозначим через (xOy) .

Считая выполненным условие $\vec{a} \neq 0$, положим, по определению

$$\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}. \quad (1.3)$$

Очевидно, что

$$|\vec{a}^0| = 1, \quad (1.4)$$

вследствие чего $\vec{a}^0$ называют единичным вектором (или ортом) ненулевого вектора $\vec{a}$.

Будем обозначать через $\angle(\vec{a}; \vec{b})$ угол между произвольными, необязательно имеющими общее начало, ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а его величину, выраженную в радианах, символом $\angle(\vec{a}; \vec{b})$. Для любых $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$0 \leq \angle(\vec{a}; \vec{b}) \leq \pi. \quad (1.5)$$

Векторным базисом в пространстве или трехмерным репером называется совокупность трех некопланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$, расположенных в определенном порядке, не подлежащем изменению; обозначим базис через $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$. Входя-

щие в его состав векторы именуют базисными. Если $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = \angle(\vec{b}; \vec{c}) = \angle(\vec{c}; \vec{a}) = \frac{\pi}{2}$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$, то репер именуют ортонормированным. Прямоугольную систему координат,

порождаемую ортонормированным базисом $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$, будем обозначать также символом $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$. Пусть $\vec{x}$ — произвольный вектор, а $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ — любой репер; тогда существует, и притом единственная, тройка действительных чисел λ, μ и ν таких, что

$$\vec{x} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c}. \quad (1.6)$$

Правая часть этого равенства называется разложением вектора $\vec{x}$ по базису $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$. Репер в плоскости — это пара $(\vec{a}; \vec{b})$ расположенных в неизменном порядке неколлинеарных векторов, компланарных этой плоскости. Из сказанного выше следует однозначная представимость каждого вектора $\vec{x}$, компланарного определяемой базисом $(\vec{a}; \vec{b})$ плоскости, в виде

$$\vec{x} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}, \quad (1.7)$$

где $\lambda, \mu = \text{const} \in \mathbb{R}$.

Всюду в дальнейшем под $Oxyz$ подразумевается неподвижная прямоугольная правая система координат в пространстве. Обозначим соответственно через $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ единичные векторы осей (Ox) , (Oy) и (Oz) . Очевидно, что $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ — ортонормированный базис. Пусть M — произвольная точка, а $(x; y; z)$ — ее координаты. Положим $\vec{OM} = \vec{r}_M$ ($\vec{r}_M$ называется радиус-вектором точки M). В тех случаях, когда это не может стать причиной неясности, вместо $\vec{r}_M$ пишут $\vec{r}$. Из сказанного выше вытекает равенство

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}; \quad (1.8)$$

x , y и z именуют здесь координатами вектора $\vec{r}$ или его ортогональными проекциями (точнее — его скалярными ортогональными проекциями) на оси координат. Вместо (1.8) применяются также записи $\vec{r} = \{x; y; z\}$ и $\vec{r} = (x; y; z)$. Из (1.8) следует, что задание одной векторной функции, например $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in I$, равносильно одновременному заданию трех числовых (скалярных) функций $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $z = z(t)$, где $t \in I$, причем если x , y , $z \in C^m(I)$, то $\vec{r} \in C^m(I)$, и наоборот.

Скалярное, или внутреннее, произведение $\vec{a}\vec{b}$ (принята также запись $\vec{a} \cdot \vec{b}$) векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется посредством равенства

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \widehat{(\vec{a}; \vec{b})}. \quad (1.9)$$

Оно позволяет установить следующие свойства скалярного умножения: $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$; $\vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a}\vec{b})$, где $\lambda \in R$; $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$. Вместо $\vec{a}\vec{a}$ пишут $\vec{a}^2$; в силу (1.9)

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2. \quad (1.10)$$

Из (1.9) вытекает, что³

$$(\vec{a}\vec{b} = 0) \Leftrightarrow \widehat{(\vec{a}; \vec{b})} = \frac{\pi}{2}. \quad (1.11)$$

На основании (1.10) и (1.11)

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1, \quad (1.12)$$

$$\vec{i}\vec{j} = \vec{j}\vec{k} = \vec{k}\vec{i} = 0. \quad (1.13)$$

Если $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, то в силу (1.12) и (1.13)

$$\vec{a}\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \quad (1.14)$$

$$\vec{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2. \quad (1.15)$$

Пусть

$$\alpha = \widehat{(0x^+; \vec{r})}, \beta = \widehat{(0y^+; \vec{r})}, \gamma = \widehat{(0z^+; \vec{r})}. \quad (1.16)$$

Если $\vec{r} \parallel (xOy)$, то

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \gamma = \frac{\pi}{2}. \quad (1.17)$$

Длина вектора $\vec{r}$ обозначается через $|\vec{r}|$ или r и дается формулой

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (1.18)$$

вытекающей из (1.8) и (1.15).

Легко убедиться в том, что

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \cos \beta, \quad z = r \cos \gamma, \quad (1.19)$$

а в случае вектора, компланарного координатной плоскости (xOy) ,

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha. \quad (1.20)$$

Рассмотрим репер $(\vec{a}_1; \vec{a}_2; \vec{a}_3)$. Базисные векторы можно считать исходящими из одной точки; это допущение не приводит к уменьшению общности конечных результатов. Если неясность исключена, то будем именовать $(\vec{a}_1; \vec{a}_2; \vec{a}_3)$ также векторной тройкой, или короче тройкой, и записывать ее в виде $(\vec{a}_\lambda)$.

В соответствии со сказанным выше, введем орты $\vec{a}_\lambda^0 = |\vec{a}_\lambda|^{-1} \vec{a}_\lambda$, где $\lambda \in \{1; 2; 3\}$.

Предположим, что пространство оснащено прямоугольной системой координат $Oxyz$, причем $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ исходят из начала отсчета 0. Пусть тройка $(\vec{a}_\lambda^0)$ может быть совмещена с базисом $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ посредством одних лишь следующих геометрических преобразований: 1) параллельный перенос; 2) повороты каждого из векторов $\vec{a}_\lambda^0$, совершаемые так, что $\vec{a}_3^0$ не пересекает плос-

³ Запись $A \Leftrightarrow B$ выражает равносильность утверждений A и B . Знак $\Leftrightarrow$ читается «тогда и только тогда, когда».

кость $(\vec{a}_1^0; \vec{a}_2^0)$ (это условие может быть заменено более общим: допустимы любые повороты, при которых один из векторов $\vec{a}_\lambda^0$ не пересекает плоскость остальных двух). В этом случае $(\vec{a}_\lambda)$ называется правой тройкой. Если описанное совмещение векторов $(\vec{a}_\lambda^0)$ и $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ невозможно, то базис $(\vec{a}_\lambda)$ именуют левой тройкой.

Имеются различные физические истолкования правых троек. Одно из важнейших заключается в следующем. Пусть орт $\vec{a}_2^0$ неподвижен. Тогда существуют два способа совмещения векторов $\vec{a}_1^0$ и $\vec{a}_2^0$ посредством поворота орта $\vec{a}_1^0$ вокруг оси, проходящей через его начало, и ортогональной плоскости $(\vec{a}_1^0; \vec{a}_2^0)$. Назовем меньшим тот поворот, при котором выраженная в радианах длина дуги, описываемой концом вектора $\vec{a}_1^0$, лежит в промежутке $]0; \pi[$. Тройка $(\vec{a}_\lambda^0)$ является правой, если из конца орта $\vec{a}_3^0$ наименьший поворот вектора $\vec{a}_1^0$, совмещающий $\vec{a}_1^0$ и $\vec{a}_2^0$, виден совершающимся в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки. Другие интерпретации правой тройки основаны на взаимной ориентации трех пальцев левой руки (большого, указательного и среднего), расположенных попарно перпендикулярно («правило левой руки») и на винте с правой нарезкой («правило буравчика»).

Для любых $\vec{a}$ и $\vec{b}$ существует, и притом единственный, вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий одновременно следующим условиям:

1° — его длина равна (при надлежащем выборе единицы измерения длины) площади параллелограмма, сторонами которого служат $\vec{a}$ и $\vec{b}$, исходящие из одной точки, значит,

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}; \vec{b}); \quad (1.21)$$

2° — он ортогонален плоскости $(\vec{a}; \vec{b})$, т. е.

$$(\vec{a}; \vec{c}) = (\vec{b}; \vec{c}) = \frac{\pi}{2}; \quad (1.22)$$

3° — $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$ — правая тройка. Чтобы выразить зависимость вектора $\vec{c}$ от $\vec{a}$ и $\vec{b}$, его обозначают через $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}\vec{b}]$ (принят также символ $[\vec{a}; \vec{b}]$; в дальнейшем будем пользоваться в основном записью $\vec{a} \times \vec{b}$) и называют векторным, или внешним, произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. В силу 1°...3°

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}), \quad (1.23)$$

(порядок сомножителей существен при векторном умножении);

$$\vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{b}), \quad \lambda \in R; \quad (1.24)$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}; \quad (1.25)$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0; \quad (1.26)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b} = 0) \Leftrightarrow (\vec{a} \parallel \vec{b}). \quad (1.27)$$

Из (1.23) и 1°...3° следует, что

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{j} \times \vec{k} = \vec{k} \times \vec{i} = 0; \quad (1.28)$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}. \quad (1.29)$$

Если $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, то на основании (1.23)...(1.26), (1.28)...(1.29) и свойств определителей

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (1.30)$$

следовательно, $\vec{a} \times \vec{b} \neq 0$ тогда и только тогда, когда хотя бы один из миноров второго порядка матрицы

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

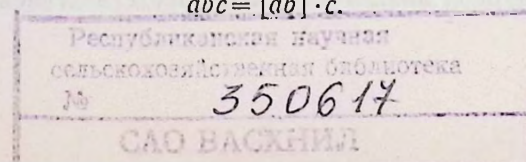
отличен от нуля.

Векторно-скалярное или смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ определяется посредством формулы

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}, \quad (1.31)$$

представимой также в виде

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}] \cdot \vec{c}. \quad (1.32)$$



Ее правая часть — число, получаемое путем скалярного перемножения векторов $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{c}$. Вместо $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$ пишут и $[\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}]$ или $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c})$. Из переместительности внутреннего произведения следует, что

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a} \times \vec{b}. \quad (1.33)$$

В силу (1.31) $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = 0$ тогда и только тогда, когда $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. В частности, коллинеарность любых двух из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ влечет за собой обращение в нуль смешанного произведения $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$.

Имеет место соотношение

$$[\vec{a} \times \vec{b}] \times \vec{c} = \vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}], \quad (1.34)$$

которому на основании (1.33) можно придать форму

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{c} \times \vec{a} = \vec{c} \times \vec{a} \times \vec{b}, \quad (1.35)$$

(сочетательный или ассоциативный закон векторно-скалярного умножения). Из (1.23) и (1.34) следует, что

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = -\vec{b} \times \vec{a} \times \vec{c} = -\vec{a} \times \vec{c} \times \vec{b} = -\vec{c} \times \vec{b} \times \vec{a},$$

т. е. смешанное произведение не обладает свойством коммутативности (переместительности).

Выражение вида $[\vec{a} \times \vec{b}] \times \vec{c}$ или $[\vec{a} \times \vec{b}] \times \vec{c}$ называется векторно-векторным произведением. Оно представляет собой, как видно из самой записи, вектор, равный соответственно внешнему произведению множителей $\vec{a}$ и $\vec{b} \times \vec{c}$ или $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{c}$. Имеет место формула

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} - (\vec{a} \times \vec{c}) \times \vec{b}. \quad (1.36)$$

1.2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЛИНИЙ

1. **Параметризованные плоские линии.** Пусть на числовом промежутке I заданы функции $x(t)$ и $y(t)$ класса $C^2(I)$. Каждому $t = t_0 \in I$ соответствует определенная точка $(x(t_0); y(t_0))$ плоскости (xOy) . Предположим, что переменная t пробегает промежуток I ; множество L всех точек $(x(t); y(t))$ таких, что $t \in I$, называется двумерной линией класса C^2 , представленной параметри-

чески или плоской кривой L класса C^2 , заданной в параметрическом виде⁴. Совокупность равенств

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in I \quad (1.37)$$

именуют параметрическими уравнениями данной линии, а t называют параметром. Запись $L \in C^2$ (или, точнее, $L \in C^2(I)$) читается « L — линия класса C^2 ».

Текущую (переменную) точку кривой (1.37) обозначим через $M(x(t); y(t))$ или $M(x; y)$. В тех случаях, когда это не может быть причиной неясности, вместо $M(x; y)$ будем писать M_t (чтобы указать на зависимость положения данной точки от параметра t) или M ; если $t_0 = \text{const} \in I$, то под M_{t_0} подразумевается положение текущей точки M при $t = t_0$.

Плоскую линию, координаты текущей точки которой представлены в виде (1.37), называют параметризованной, а уравнения (1.37) — параметризацией данной кривой.

Параметрическое представление позволяет описать аналитически линии, задание которых посредством уравнений вида $y = f(x)$ невозможно. Например, окружность с центром в начале координат и радиусом длины r можно описать параметрически формулами

$$\begin{cases} x = r \cos t, \\ y = r \sin t, \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi], \quad (1.38)$$

однако ее невозможно представить с помощью явно заданной функции $y = f(x)$ (каждое из уравнений $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ и $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ определяет лишь полуокружность). Поэтому в дальнейшем будем задавать кривые преимущественно параметрически.

Каждая линия класса C^2 допускает бесконечное множество параметрических представлений. Действительно, пусть на промежутке I_0 определена функция $t = f(\tau)$ класса $C^2(I_0)$, множеством значений которой служит числовой интервал I . Тогда система равенств

$$\begin{cases} x = x(f(\tau)), \\ y = y(f(\tau)), \end{cases} \quad \tau \in I_0 \quad (1.39)$$

будет другой параметризацией кривой (1.37). Легко видеть, например, что окружность (1.38) допускает также параметрическое представление

⁴ В тех случаях, когда это не может стать причиной неясности, вместо «двумерная линия» или «плоская кривая» будем пользоваться терминами «линия» и «кривая».

$$\begin{cases} x = \frac{r(1-\tau^2)}{1+\tau^2}, \\ y = \frac{2r\tau}{1+\tau^2}, \end{cases} \quad \tau \in R.$$

К естественному вопросу о том, какой из возможных параметризаций данной линии отдать предпочтение, мы обратимся в дальнейшем.

Следует принять во внимание, что уравнения вида (1.37) могут изображать линию, дважды пробегаемую текущей точкой. Действительно, рассмотрим кривую

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^4, \end{cases} \quad t \in [-1; 1].$$

При изменении параметра t от -1 до 0 точка M_t описывает дугу⁵ парболы $y=x^2$ с концами 0 и $M_1(1; 1)$, пробегая ее без изменения направления обхода, от M_1 до начала координат. Если же t изменяется от 0 до 1 , то M_t описывает ту же дугу, пробегая ее от 0 до M_1 .

Кинематический смысл равенств (1.37) состоит в том, что при их наличии положение точки $M(x; y)$ в плоскости (xOy) определено, и притом однозначно, в любой момент $t=t_0 \in I$, следовательно, задано движение этой точки в течение всего промежутка времени I . Уравнениями (1.37) задаются как траектория L точки M , так и закон ее движения по кривой L (законом движения точки назовем правило, позволяющее установить, и притом однозначно, ее положение в любой момент, принадлежащий промежутку времени, в течение которого происходит движение).

2. Простая дуга плоской кривой. Простым криволинейным отрезком в плоскости или простой плоской дугой, или простым куском плоской линии называется кривая L , обладающая следующим свойством: в данной плоскости существует хотя бы одна неподвижная прямоугольная система координат xOy такая, что линия L служит графиком некоторой непрерывной функции

$$y=y(x), \quad x \in [a; b]. \quad (1.40)$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $y(x) \in C^2[a; b]$ и говорить о простой дуге класса C^2 , опуская слова «плоская» или «в плоскости» в тех случаях, когда это не становится причиной неясности. Простой кусок кривой не может быть ни замкнутым, ни самопересекающимся. Заметим

$$L: y=y(x), \quad y(x) \in C^2[a; b], \quad (1.41)$$

⁵ Рассматривая кривую как множество точек, назовем любое ее подмножество, задаваемое теми же параметрическими уравнениями при $t \in I_0$, где I_0 — числовой промежуток, содержащийся в I ($I_0 \in I$), дугой данной линии. Более строгие определения дуги приводятся ниже.

читается: « L — простая дуга класса C^2 , уравнение которой $y=y(x)$, $x \in [a; b]$ ».

Иногда возникает необходимость перейти от (1.40) к параметрическому способу задания простого куска кривой. Легко видеть, что параметрическим представлением дуги (1.40) будет, например,

$$\begin{aligned} x &= y, \\ y &= y(t), \end{aligned} \quad t \in [a; b]. \quad (1.42)$$

Согласно определению простой дуги, она допускает аналитическое описание вида (1.40) хотя бы в одной системе координат. Отсюда не следует, что простой криволинейный отрезок служит графиком явно заданной функции в любой введенной в данной плоскости неподвижной прямоугольной системе отсчета. Например, показанная на рис. 1 дуга обладает представлением типа (1.40) в системе координат $x_1O_1y_1$ и не обладает им в системе xOy .

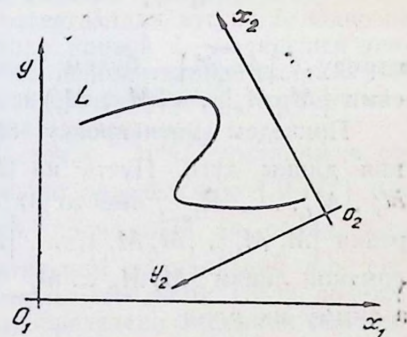


Рис. 1

3. Длина дуги. Пусть $t_0, T = \text{const} \in I$, причем $t_0 < T$. Предположим, что при возрастании переменной t от t_0 до T текущая точка M_t пробегает в точности один раз ту часть кривой $L(L \in C^2(I))$, которая соответствует числовому отрезку $[t_0; T]$. Назовем тогда указанную часть линии дугой данной кривой и обозначим эту дугу через $[M_{t_0}M_T]_L$ (наличие индекса L в этой записи обусловлено тем, что одни лишь точки M_{t_0} и M_T не определяют однозначно указанную дугу; тем не менее в случаях, когда неясность исключена, будем писать $[M_{t_0}M_T]$ вместо $[M_{t_0}M_T]_L$).

Точки M_{t_0} и M_T именуют концами указанной дуги; она называется замкнутой, если M_{t_0} и M_T совпадают.

Если $[t_0; T] = I$ (это не противоречит сказанному выше), то, очевидно, $[M_{t_0}M_T]_L = L$.

Сопоставляя определение произвольной дуги класса C^2 , соответствующей заданному отрезку $[t_0; T]$, со сформулированным ранее определением простого куска кривой, приходим к выводу, что в общем случае дуга класса C^2 может не быть простой дугой. Например, окружность является, как видно из (1.38), дугой класса $C^2[0; 2\pi]$, не будучи, однако, простым криволинейным отрезком.

Из того, что $x, y \in C^2(I)$, следует непрерывность первых производных $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$ на отрезке $[t_0; T]$. Поэтому и функция $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ непрерывна, а значит, интегрируема на $[t_0; T]$. Отсюда вытекает, что интеграл $\int_{t_0}^T \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$ существует. Назовем его значение длиной дуги $[M_{t_0}, M_T]$ и введем обозначение

$$|M_{t_0}, M_T| = \int_{t_0}^T \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt; \quad (1.43)$$

наряду с $|M_{t_0}, M_T|$ будем пользоваться и равнозначными записями $|M_{t_0}, M_T|_L$, $s(M_{t_0}; M_T)$ и $s(L; M_{t_0}; M_T)$.

Приведем мотивировку сформулированного выше определения длины дуги. Пусть на $[M_{t_0}, M_T]$ взяты произвольно точки $M_{t_1}, M_{t_2}, \dots, M_{t_{n-1}}$ вместо M_T пишем также M_{t_n} . Назовем отрезки $[M_{t_0}, M_{t_1}]$, $[M_{t_1}, M_{t_2}]$, $\dots$, $[M_{t_{n-1}}, M_{t_n}]$ сторонами (звеньями) ломаной линии $[M_{t_0}, M_{t_1}, \dots, M_{t_{n-1}}, M_{t_n}]$, вписанной в дугу $[M_{t_0}, M_T]$, а сумму их длин

$$\sum_{k=1}^n |M_{k-1}, M_k|$$

— периметром (или длиной) этой ломаной. Можно доказать [5; 7; 11; 14; 21; 22], что если число ее сторон неограниченно возрастает (т. е. $n \rightarrow \infty$) и притом так, что наибольшая из их длин стремится к нулю, то ее периметр стремится к пределу, равному правой части формулы (1.43).

В случае простого куска кривой $y=y(x)$ соотношение (1.43) примет вид

$$|\widetilde{AB}| = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx \quad (1.44)$$

(A и B — концы дуги, а a и b — соответственно их абсциссы в системе координат xOy , причем $a < b$). Это следует из (1.42) и (1.43).

Заданная уравнениями (1.37) кривая, применительно к которой интеграл (1.43) существует для любых $t_0, T \in I$ называется спрямляемой. Из одной лишь непрерывности кривой не следует ее спрямляемость. Действительно, пусть например, $x, y \in C(I)$, но хотя бы одна из функций x, y не дифференцируема во всем промежутке I . Тогда в (1) подынтегральная функция не определена ни при каком $t \in I$, значит, интеграл не существует, т. е. линия (1.37) не спрямлена.

Введем достаточное условие спрямляемости. В силу определения класса C^1 и на основании теоремы о непрерывности сложной функции имеет место импликация⁶

$$(x, y \in C^2(I) \Rightarrow (\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \in C(I)).$$

Из нее и интегрируемости любой непрерывной функции следует, что каждая кривая класса C^k ($k \geq 1$) спрямляема.

4. Длина дуги как параметр. Обозначим открытую или замкнутую линию класса C^2 , задаваемую уравнениями (1.37), через L . Пусть на ней выделена любым образом фиксированная точка M_0 . Будем именовать ее началом отсчета длин дуг на L . Одно из двух возможных направлений обхода кривой L ее текущей точкой назовем положительным. Линия, положительное направление обхода которой выбрано, называется ориентировкой; говорят также, что на ней задана (или введена) ориентация.

Произвольной, отличной от M_0 точке $M^* \in L$ поставим в соответствие число $s = s(M^*)$, равное, по определению $|M_0, M^*|$ или $-\widetilde{|M_0, M^*|}$ в зависимости от того, происходит ли обход дуги $[M_0, M^*]$ от M_0 до M^* в положительном направлении или нет; началу отсчета сопоставим число нуль: $s(M_0) = 0$. Тогда положение любой точки $M \in L$ однозначно определено заданием действительного числа $s(M)$. Оно называется криволинейной абсциссой точки M на линии L . Начало отсчета длин дуг, единица их измерения и ориентация кривой вместе взятые образуют систему отсчета на линии L .

Определение положения точек на кривой, оснащенной системой отсчета, путем задания их криволинейных абсцисс возможно лишь при наличии способа измерения (или, что равносильно, откладывания) длин вдоль данной линии. Им мы, однако, располагаем только для прямой и окружности. В случае же любой другой кривой определение положения ее точек возможно лишь посредством их координат. Поэтому задание точек на линии с помощью их криволинейной абсциссы осуществимо лишь, если имеются формулы, выражающие через нее их декартовы координаты. Вопрос о существовании таких формул и о способе их вывода изучается ниже.

Будем предполагать всюду в дальнейшем, что производные $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$ не обращаются одновременно в нуль ни при каком значении переменной t , принадлежащей отрезку $[t_0, T]$, т. е. что

$$(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 > 0 \text{ для всех } t \in [t_0; T]. \quad (1.45)$$

⁶ Если из утверждения (высказывания) A следует истинность утверждения B , то пишут $A \Rightarrow B$; эта запись называется импликацией и читается « A влечет за собой B » или «высказывание A имплицитно высказывание B ». Символ $\Rightarrow$ называется знаком импликации.

Рассмотрим интеграл

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{(\dot{x}(\theta))^2 + (\dot{y}(\theta))^2} d\theta, \quad t_0 \leq t \leq T \quad (1.46)$$

полученный из (1.43) путем замены T через t' и равный поэтому длине дуги $[M_{t_0}, M_t]$ с фиксированным началом M_{t_0} и переменным концом M_t ($M_t \in [M_{t_0}, M_T]$). Правая часть равенства (1.46) является функцией переменной t , будем записывать поэтому соотношение (1.46) сокращенно в виде

$$s = s(t), \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (1.47)$$

Из (1.46), непрерывности подынтегральной функции и теоремы о дифференцируемости определенного интеграла по его верхнему пределу [7] следует, что производная $\frac{ds}{dt}$ существует (точнее — $s(t) \in C^1[t_0; T]$), причем

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} > 0, \quad t \in [t_0; T]^a \quad (1.48)$$

на основании (1.45). В силу (1.48) функция $s(t)$ строго возрастает на отрезке $[t_0; T]$ [7; 22], будучи непрерывной и строго монотонной на нем, значит, она обладает обратной функцией [7], вследствие чего уравнение (1.47) разрешимо, и притом однозначно, относительно t . Выразив из (1.47) t через s , получим соотношение вида

$$t = g(s), \quad 0 \leq s \leq |M_{t_0}, M_T|. \quad (1.49)$$

Подставим в (1.37) вместо t правую часть равенства (1.49):

$$\begin{cases} x = x(g(s)), \\ y = y(g(s)), \end{cases} \quad 0 \leq s \leq |M_{t_0}, M_T|. \quad (1.50)$$

Вместо (1.50) пишут обычно

$$\begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \end{cases} \quad s_0 \leq s \leq S, \quad (1.51)$$

где $s_0, s = \text{const} \in R$, причем $s_0 < S$; а под $x(s)$ и $y(s)$ подразумевают $x(g(s))$ и $y(g(s))$ соответственно. Тем самым получено новое параметрическое представление кривой (1.37): параметром

⁷ В (1.46) переменная интегрирования обозначена через θ . Это не влияет на значение интеграла, ибо $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(\theta) d\theta$.

⁸ Всякую в дальнейшем запись вида $t \in M$ (M — любое числовое множество) или $a \leq t \leq b$ и т. п., расположенная правее равенства или неравенства, содержащего переменную t , означает, что оно выполняется соответственно для всех $t \in M$ или на всем отрезке $[a; b]$ и т. п.

является теперь длина ее дуги, начало которой — фиксированная, а конец — текущая точка данной линии. Параметризация (1.51) называется натуральной, а переменная s — криволинейной абсциссой или натуральным параметром.

Выше было установлено, что каждая линия класса C^2 допускает бесконечное множество параметризаций; при переходе от (1.37) к (1.39) функция j могла быть по существу любой. Это значит, что применяемое для аналитического описания кривой параметрическое представление не вытекает, как правило, из ее внутренних (геометрических) свойств, а выбрано произвольным образом. Отсюда следует, что все утверждения о ней, полученные исходя из некоторой ее параметризации, доставляют информацию не только о самой линии, но и о (постороннем по отношению к ней) способе введения параметра. Поэтому возникает вопрос: можно ли исключить указанную неопределенность, т. е. существует ли параметрическое представление, органически связанное с кривой и не содержащее какого-либо произвола или сводящее его к минимуму. Ответ утвердителен: параметром, не отделимым от любой линии, является длина ее дуги; этим и объясняется название натуральный параметр. От всех других параметризаций натуральная отличается тем, что она геометрически, т. е. естественным образом связана с самой кривой.

Единственная, и притом неустраиваемая, произвольность при натуральной параметризации заключается в том, что начало отсчета длин дуг данной линии и ее ориентация могут быть выбраны любым образом.

В дальнейшем мы убедимся в преимуществах натуральной параметризации при исследовании движений. Она, однако, не вытеснила другие параметризации. Причина заключается в том, что для большинства кривых, встречающихся в прикладных задачах, введение натурального параметра либо приводит к сложным формулам, либо не выполнимо с помощью элементарных функций. Например, парабола $y = x^2$ допускает параметризацию

$$x = t, \quad y = t^2. \quad (1.52)$$

В качестве начала отсчета длин дуг примем вершину параболы. Тогда в силу (1.46) и (1.52)

$$S = \int_0^t \sqrt{4\theta^2 + 1} d\theta. \quad (1.53)$$

Легко убедиться в том, что

$$\left(\frac{1}{2} \theta \sqrt{4\theta^2 + 1} + \frac{1}{4} \ln(2\theta + \sqrt{4\theta^2 + 1}) \right)' = \sqrt{4\theta^2 + 1} \quad (1.54)$$

при любом $\theta \in R$. На основании (1.53) и (1.54)

$$s = \frac{1}{2} t \sqrt{4t^2 + 1} + \frac{1}{4} \ln(2t + \sqrt{4t^2 + 1}). \quad (1.55)$$

Для перехода к натуральному параметру необходимо выразить из (1.55) t через s и подставить найденное значение в (1.52). Согласно доказанному выше уравнение (1.55) определяет t как функцию переменной s , т. е. существует, и притом единственная функция $t=g(s)$, подстановка которой вместо t в правую часть равенства (1.55) превращает его в тождество. Однако $g(s)$ не выражается аналитически через s с помощью элементарных функций (существованию функций $g(s)$ не противоречит невозможность ее представления в виде аналитического выражения). Поэтому выписать натуральную параметризацию данной параболы, выраженную через элементарные функции, невозможно.

Выведем два следствия из (1.48). Они будут использованы в дальнейшем.

Формула (1.48) равносильна соотношению

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2. \quad (1.56)$$

Равенство (1.56) имеет место при любой параметризации линии L . Оно остается поэтому в силе применительно к натуральной параметризации (1.51), (т. е. для $t=s$). В этом случае оно примет вид

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$$

или, что то же,

$$[x'(s)]^2 + [y'(s)]^2 = 1. \quad (1.57)$$

Если L — простая дуга, являющаяся графиком функции $y=y(x)$, то формула (1.48) упрощается, обретая форму

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (y'(x))^2}. \quad (1.58)$$

5. Касательная к кривой. Рассмотрим простой криволинейный отрезок

$$L: y=f(x), \quad f \in C^2[a; b]. \quad (1.59)$$

Пусть $M_0(x_0; y_0)$ — его произвольная фиксированная внутренняя точка, а $M(x; y)$ — его текущая точка (рис. 2), причем

$$x \neq x_0, \quad (1.60)$$

т. е. совпадение M и M_0 исключается; $(MM') \perp (0x)$, $M' \in (0x)$, $(M_0N) \parallel (0x)$, где N — пересечение прямых (MM') и (M_0N) ;

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0. \quad (1.61)$$

В силу (1.60) и (1.61)

$$\Delta x \neq 0. \quad (1.62)$$

При любом взаимном расположении точек M_0 , M и N (см. рис. 2)

$$0 \leq \widehat{NM_0M} < \frac{\pi}{2}. \quad (1.63)$$

Назовем $\angle(0x^+; M_0M^+)$ углом между положительным направлением оси абсцисс и секущей (M_0M) к дуге L . Из (1.2) вытекает равенство

$$\angle(0x^+; M_0M^+) = \angle(0x^+; MM_0^+).$$

Положим

$$\alpha^* = \alpha^*(x_0; x; f) = \angle(0x^+; M_0M^+). \quad (1.64)$$

Запись $\alpha^*(x_0; x; f)$ означает, что α^* зависит от x_0 , x и от функции f , т. е. от кривой L . В тех случаях, когда это не может

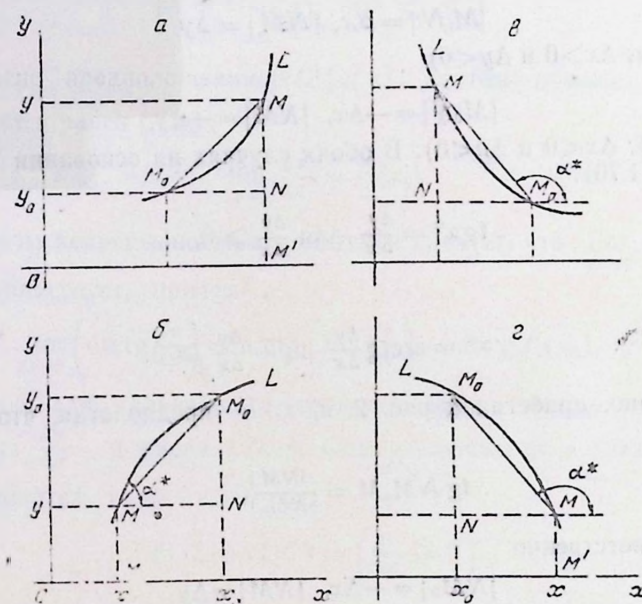


Рис. 2

привести к неясности, будем писать $\alpha^*(x)$ или $\alpha^*(M)$ вместо $\alpha^*(x_0; x; f)$. Из (1.1) и (1.64) следует, что

$$0 \leq \alpha^* \leq \pi \text{ для всех } M_0, M \in L, \quad (1.65)$$

где, по определению

$$\begin{aligned} \alpha^* &= 0 \text{ при } \Delta x > 0 \text{ и } \Delta y = 0, \\ \alpha^* &= \pi \text{ при } \Delta x < 0 \text{ и } \Delta y = 0. \end{aligned}$$

На рис. 2 показано, что если $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, то

$$\alpha^* = \widehat{NM_0M}, \quad (1.66)$$

а при $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$

$$\alpha^* = \pi - \widehat{NM_0M}. \quad (1.67)$$

Рассматривая ΔNM_0M (рис. 2, а, б), находим

$$\operatorname{tg} \widehat{NM_0M} = \frac{|NM|}{|M_0N|}, \quad (1.68)$$

причем

$$|M_0N| = \Delta x, \quad |NM| = \Delta y \quad (1.69)$$

(рис. 2, а; $\Delta x > 0$ и $\Delta y < 0$)
или

$$|M_0N| = -\Delta x, \quad |NM| = -\Delta y, \quad (1.70)$$

(рис. 2, б; $\Delta x < 0$ и $\Delta y < 0$). В обоих случаях на основании (1.66) и (1.68)...(1.70).

$$\operatorname{tg} \alpha^* = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{для} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0, \quad (1.71)$$

откуда

$$\alpha^* = \operatorname{arctg} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{при} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0. \quad (1.72)$$

Аналогично, прибегая к рис. 2, в, г и предполагая, что $y \neq y_0$, получим

$$\operatorname{tg} \widehat{NM_0M} = \frac{|NM|}{|NM_0|}, \quad (1.73)$$

где соответственно

$$|NM_0| = -\Delta x, \quad |NM| = \Delta y, \quad (1.74)$$

$$(\Delta x < 0, \text{ а } \Delta y > 0),$$

или

$$|NM_0| = \Delta x, \quad |NM| = -\Delta y, \quad (1.75)$$

($\Delta x > 0$, а $\Delta y < 0$), значит $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$. Вследствие (1.73)...(1.75)

$$\widehat{NM_0M} = \operatorname{arctg} \left(-\frac{\Delta y}{\Delta x} \right), \quad (1.76)$$

а на основании (1.67) и (1.76)

$$\alpha^* = \pi - \operatorname{arctg} \left(-\frac{\Delta y}{\Delta x} \right), \quad \text{если} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} < 0. \quad (1.77)$$

Нечетность арктангенса ($\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$ для всех $x \in \mathbb{R}$) позволяет представить соотношение (1.77) в виде

$$\alpha^* = \pi + \operatorname{arctg} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{для} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} < 0. \quad (1.78)$$

В силу (1.72) и (1.78)

$$\alpha^* = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\Delta y}{\Delta x} & \text{при} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{\Delta y}{\Delta x} & \text{при} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} < 0. \end{cases} \quad (1.79)$$

Согласно предположению $f \in C^1[a; b]$, поэтому предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ существует и равен $f'(x_0)$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0). \quad (1.80)$$

Отсюда и из непрерывности арктангенса следует, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ также существует, причем⁹

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\operatorname{arctg} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \operatorname{arctg} \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \operatorname{arctg} f'(x_0). \quad (1.81)$$

Важной для дальнейшего является связь между знаками отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и числа $f'(x_0)$. Она заключается в следующем.

Пусть имеется такое $\varepsilon > 0$, что

$$(0 < |\Delta x| < \varepsilon \Rightarrow \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0 \right)).$$

Тогда на основании (1.60) и в силу сохранения знака неравенства при переходе к пределу в обеих частях нестрогого неравенства $f'(x_0) \geq 0$. Аналогично, если

$$(0 < |\Delta x| < \varepsilon \Rightarrow \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0 \right)),$$

то $f'(x_0) \leq 0$. Последние два соотношения между $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и $f'(x_0)$ представимы соответственно в виде

⁹ Если $f, g \in C$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x))$.

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0 \text{ при } 0 < |\Delta x| < \varepsilon \Rightarrow (f'(x_0) \geq 0)\right) \quad (1.82)$$

и

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0 \text{ при } 0 < |\Delta x| < \varepsilon \Rightarrow (f'(x_0) \leq 0)\right). \quad (1.83)$$

Определим теперь число $\alpha(x_0; f)$ следующим образом:

$$\alpha(x_0; f) = \begin{cases} \operatorname{arctg} f'(x_0) & \text{для } f'(x_0) \geq 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} f'(x_0) & \text{для } f'(x_0) < 0 \end{cases} \quad (1.84)$$

(вместо $\alpha(x_0; f)$ будем писать также $\alpha(x_0)$ и $\alpha(M_0)$). В силу (1.79) и (1.81) $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha^*$ существует, а на основании (1.79), (1.81) и (1.84)

$$\alpha(x_0; f) = \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha^*(x_0, x; f). \quad (1.85)$$

Проходящая через M_0 прямая (l_{M_0}) , удовлетворяющая условию $(0x^+; l_{M_0}^+) = \alpha(x_0)$, называется касательной к линии L в точке M_0 . Функцию $\alpha = \alpha(x)$, заданную формулами

$$\alpha(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} f'(x), & \text{если } f'(x) \geq 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} f'(x), & \text{если } f'(x) < 0, \end{cases} \quad (1.86)$$

будем именовать величиной $<(0x^+; l_M^+)>$, между положительным направлением оси абсцисс и касательной (l_M) к кривой (1.59) в ее точке M с абсциссой x :

$$\alpha(x) = (0x^+; l_M^+). \quad (1.87)$$

Соотношения (1.79), (1.84) и (1.85) лежат в основе следующего утверждения, описывающего с помощью кинематических понятий связь между секущей и касательной: если текущая точка M линии L класса C^1 , перемещаясь вдоль кривой, стремится к ее фиксированной точке M_0 , то секущая (M_0M) , непрерывно вращаясь в данной плоскости вокруг M_0 , стремится к предельному положению, зависящему только от L и M_0 ; прямая, являющаяся предельным положением секущей, называется касательной к этой кривой в точке M_0 .

Если $f \in C^2$, то во всех точках, в которых $f'(x) \neq 0$, функция $\alpha(x)$ непрерывна и обладает непрерывной производной, причем на основании (1.86), формулы $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ и теоремы о производной сложной функции

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{f''(x)}{1+(f'(x))^2}. \quad (1.88)$$

Пусть теперь $f'(x_0) = 0$. Тогда на основании теоремы о пределе сложной функции и ввиду непрерывности производной f' и арктангенса

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arctg} f'(x) = \operatorname{arctg} (\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)) = \operatorname{arctg} f'(x_0) = 0. \quad (1.89)$$

Равенство (1.89) имеет место при любом способе стремления переменной x к числу x_0 , в частности как при $x \rightarrow x_0 - 0$, так и при $x \rightarrow x_0 + 0$ (запись $x \rightarrow x_0 - 0$ читается « x стремится к x_0 слева» и означает, что аргумент x стремится к x_0 , оставаясь меньше, чем x_0 ; аналогично определяется соотношение $x \rightarrow x_0 + 0$). Введем односторонние пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x)$, где $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x)$ означает

предел функции $\alpha(x)$ при x , стремящемся к x_0 и пробегающем при этом ту одностороннюю окрестность числа x_0 , которая задается условием $f'(x) > 0$. Поэтому вид $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x)$ следует понимать как $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \alpha(x)$ или $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \alpha(x)$ в зависимости от того, возрастает или убывает $f(x)$ при $x < x_0$. Смысл записи $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x)$ аналогичен.

В силу (1.86) и (1.89)

$$(f'(x_0) = 0 \Rightarrow (\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0)), \quad (1.90)$$

$$f'(x_0) = 0 \Rightarrow (\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \pi). \quad (1.91)$$

Из (1.90) и (1.91) следует, что если $f'(x_0) = 0$, то предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x)$ не существует, значит, функция $\alpha(x)$, разрывна во всех точках, в которых $f'(x) = 0$; она, следовательно, не дифференцируема в них. Однако односторонние пределы $\alpha'(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \alpha'(x)$ и $\alpha'(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \alpha'(x)$ существуют и выражаются равенствами

$$\alpha'(x_0 - 0) = \alpha'(x_0 + 0) = f''(x_0). \quad (1.92)$$

Это следует из справедливости формулы (1.88) для всех x , удовлетворяющих условию $f'(x) \neq 0$, и существованию пределов $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} f''(x)$ (обусловленного тем, что $f \in C^2$), причем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f''(x) = f''(x_0).$$

Все сказанное выше остается в силе для любой линии класса C^2 , заданной параметрически. В этом случае α будет, очевидно, функций параметра t . Если $\Delta x \neq 0$ и $\Delta t \neq 0$, то

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta t} : \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (1.93)$$

Пределы $\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$ и $\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ существуют и равны соответственно $\dot{y}(t_0)$ и $\dot{x}(t_0)$ (вследствие дифференцируемости функций $x(t)$ и $y(t)$). Поэтому для всех значений переменной t , удовлетворяющих условию $\dot{x} \neq 0$, существует и предел $\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, причем в силу (1.93)

$$y'(M_0) = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{M_0} = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}, \quad \dot{x} \neq 0. \quad (1.94)$$

Из (1.86) и (1.94) следует, что применительно к произвольной параметризованной кривой $L \in C^2$

$$\alpha = \begin{cases} \arctg \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} & \text{для } \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \geq 0, \\ \pi + \arctg \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} & \text{для } \frac{\dot{y}}{\dot{x}} < 0, \end{cases} \quad (1.95)$$

если $\dot{x}(t) \neq 0$. В случае, когда $\dot{x}(t_0) = 0$ и $\dot{y}(t_0) \neq 0$, положим по определению $\alpha(t_0) = \frac{\pi}{2}$. Геометрический смысл этого равенства заключается в том, что при $\dot{x}(t_0) = 0$ касательная к линии L в точке $(x(t_0); y(t_0))$ перпендикулярна к оси абсцисс.

В случае натуральной параметризации формула (1.95) принимает вид

$$\alpha(s) = \begin{cases} \arctg \frac{y'(s)}{x'(s)} & \text{при } \frac{y'(s)}{x'(s)} \geq 0, \\ \pi + \arctg \frac{y'(s)}{x'(s)} & \text{при } \frac{y'(s)}{x'(s)} < 0. \end{cases} \quad (1.96)$$

Во всех точках, в которых $\dot{x} \neq 0$ и $\dot{y} \neq 0$, функция α дифференцируема. Будем иметь

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\arctg \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right)^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) = \frac{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}. \quad (1.97)$$

6. Нормаль к плоской кривой. Существует, очевидно, одна и только одна прямая, лежащая в той же плоскости, что и линия L , проходящая через M_0 и перпендикулярная к L_{M_0} . Обозначим эту прямую через n_{M_0} ; она называется нормалью к кривой L в точке M_0 .

7. Выпуклые линии. Пусть простой криволинейный отрезок

$$L: y = y(x), \quad y(x) \in C^2[a; b] \quad (1.98)$$

расположен целиком выше любой из его касательных (рис. 3). В этом случае дуга L , а также функция $y(x)$ называется строго выпуклой вниз (или, короче, строго выпуклой) на отрезке $[a; b]$. Если, наоборот, данный криволинейный отрезок

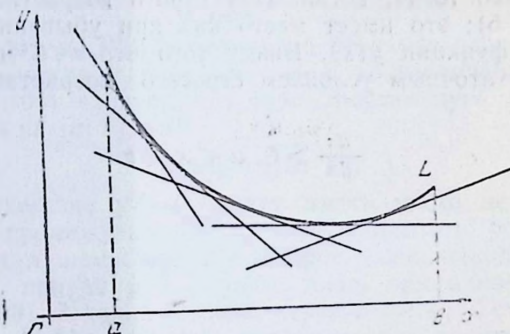


Рис. 3

лежит целиком ниже каждой из проведенных к нему касательных, то L и $y(x)$ называются строго выпуклыми вверх или строго вогнутыми при $a \leq x \leq b$.

Аналогичным образом вводится понятие нестрого выпуклых дуг и функций. Например, показанная на рис. 4 линия нестрого

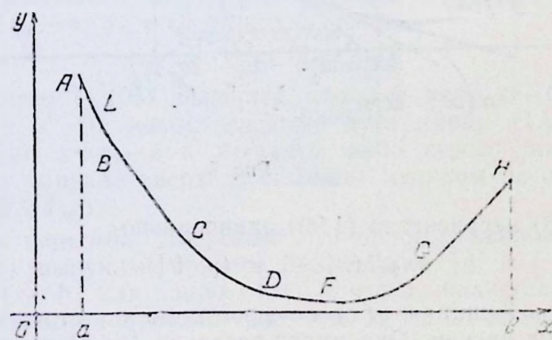


Рис. 4

выпукла вниз на отрезке $[a; b]$. В дальнейшем нестрого выпуклые кривые не встретятся. Поэтому в тех случаях, когда это не может стать причиной неясности, вместо «строго выпуклый» будем пользоваться термином «выпуклый».

Установим необходимые и достаточные признаки выпуклости простых дуг. Пусть $M(x; y)$ — текущая точка криволинейного

отрезка (1.98), (l_M) — касательная к нему в точке M , а $\alpha = \alpha(x)$ — величина угла $\angle(0x^+; l_M^+)$; функция $\alpha(x)$ определена равенствами (1.86) и (1.87). Предположим, что при $a \leq x \leq b$ функция $y(x)$ строго монотонна. В этом случае дуга L выпукла вниз тогда и только тогда, когда $\alpha(x)$ строго возрастает на отрезке $[a; b]$ (рис. 5); это имеет место как при убывании, так и при возрастании функции $y(x)$. Ввиду того что $\alpha \in C^2[a; b]$, необходимым и достаточным условием строгого возрастания функции $\alpha(x)$ служит

$$\frac{d\alpha}{dx} > 0, \quad a < x < b. \quad (1.99)$$

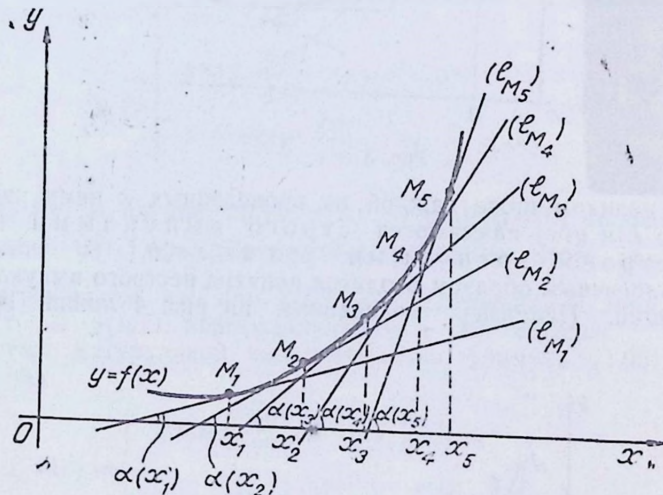


Рис. 5

В силу (1.88) неравенство (1.99) равносильно

$$y''(x) > 0, \quad x \in]a; b[.$$

Пусть теперь функция $y(x)$ не монотонна на отрезке $[a; b]$ и выпукла вниз на нем. Она имеет тогда на $[a; b]$ в точности один экстремум. Им будет строгий локальный минимум, достигаемый в некоторой внутренней точке $x_0 \in]a; b[$; в каждом из промежутков $[a; x_0[$ и $]x_0; b]$ функция $y(x)$ строго монотонна. Поэтому, в силу доказанного выше,

$$y'' > 0, \quad x \in [a; b] \setminus \{x_0\}. \quad (1.100)$$

Покажем, что

$$y''(x_0) \geq 0. \quad (1.101)$$

Имеет место очевидная импликация

$$(y \in C^2[a; b]) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} y''(x) \text{ существует} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} y''(x) = y''(x_0) \end{array} \right). \quad (1.102)$$

Условия (1.100), (1.102) и теорема о переходе к пределу в обеих частях неравенства влекут за собой соотношение (1.101). Из (1.100) и (1.101) следует, что если простая дуга (1.98) строго выпукла вниз на $[a; b]$, то

$$y'' \geq 0, \quad x \in]a; b[; \quad (1.103)$$

при этом равенство $y'' = 0$ может иметь место не более чем в одной точке промежутка $]a; b[$. Легко доказать, рассуждая аналогично предыдущему, что и наоборот, если выполнено неравенство (1.105), причем $y'' = 0$ разве лишь при одном значении x , то линия (1.98) выпукла вниз на отрезке $[a; b]$. Тем самым установлено, что условие (1.103) необходимо и достаточно для выпуклости вниз кривой (1.98) на отрезке $[a; b]$. Она строго выпукла вверх на нем тогда и только тогда, когда

$$y'' \leq 0, \quad x \in]a; b[, \quad (1.104)$$

а y'' обращается в нуль не более чем один раз.

Из сказанного выше вытекает важное для дальнейшего следствие. Предположим, что $y'' \in C^2[a; b]$ и $y''(x_0) \neq 0$, где $x_0 \in]a; b[$. Тогда ввиду непрерывности функции $y''(x)$ существует такая, содержащаяся целиком в промежутке $]a; b[$ окрестность $U(x_0; \epsilon) =]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[$ точки x_0 , что

$$y'' \neq 0, \quad x \in U(x_0; \epsilon). \quad (1.105)$$

Неравенство (1.105) означает, что для всех $x \in U(x_0; \epsilon)$ либо $y'' > 0$, либо $y'' < 0$, иными словами дуга линии (1.98), отсекаемая прямыми $x = x_0 - \epsilon$ и $x = x_0 + \epsilon$, либо строго выпукла вниз, либо строго выпукла вверх, т. е. лежит целиком по одну сторону касательной (l_{M_0}) .

8. Точки перегиба. Допустим, что простой криволинейный отрезок (1.98) выпуклый вниз в промежутке $]a; x_0[$ и вверх — в интервале $]x_0; b[$ или наоборот, т. е. что x_0 является общим концом двух смежных промежутков (см. п. 1.2.1), в которых линия (1.37) обладает противоположной выпуклостью (рис. 6). В этом случае любая дуга линии (1.98), содержащая точку $M_0(x_0; y(x_0))$, расположена по обе стороны касательной (l_{M_0}) , а M_0 называется точкой перегиба данной кривой (так же именуют, если это не может стать причиной неясности, и точку $x = x_0$). Принято и выражение «при $x = x_0$ линия (1.98) имеет перегиб».

Установим необходимое и достаточное условие наличия перегиба. Из доказанного в п. 1.2.7 вытекает следующее: кривая $y = y(x)$ класса C^2 имеет перегиб при $x = x_0$ тогда и только тогда, когда существует такое $\epsilon > 0$, что в одном из смежных промежутков

$]x_0 - \varepsilon; x_0[$ и $]x_0; x_0 + \varepsilon[$, отделяемых числом x_0 , вторая производная $y''(x)$ положительна, а в другом — отрицательна.

Сформулированный выше критерий влечет за собой важное следствие: если x_0 — точка перегиба линии $y=y(x)$ класса C^2 , то $y''(x_0)=0$. Действительно, пусть кривая (1.98) выпукла вниз в промежутке $]a; x_0[$ и выпукла вверх в интервале $]x_0; b[$. Тогда, вследствие установленного в п. 1.2.7,

$$y'' \geq 0, x \in]a; x_0[; \quad (1.106)$$

$$y'' \leq 0, x \in]x_0; b[. \quad (1.107)$$

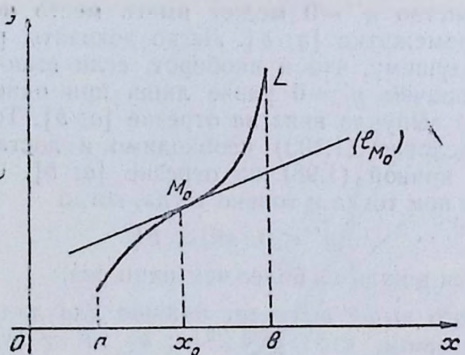


Рис. 6

Условия (1.106), (1.107) и $y \in C^2[a; b]$ влекут за собой равенство $y''(x_0)=0$. Докажем это. Очевидна справедливость импликации

$$(y \in C^2[a; b]) \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0-0} y''(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0-0} y''(x) = y''(x_0) \text{ существует,} \end{cases} \quad (1.108)$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0+0} y''(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0+0} y''(x) = y''(x_0) \text{ существует.} \end{cases} \quad (1.109)$$

Из (1.106), (1.108) и теоремы о переходе к пределу в обеих частях неравенства следует

$$y''(x_0) \geq 0, \quad (1.110)$$

а из (1.107) и (1.109) и той же теоремы —

$$y''(x_0) \leq 0. \quad (1.111)$$

На основании (1.110) и (1.111)

$$y''(x_0) = 0. \quad (1.112)$$

К этому же выводу приходим в случае выпуклости вверх, при $x < x_0$ и вниз — для $x > x_0$.

Обратное утверждение неверно: из одного лишь равенства (1.112) не вытекает наличие перегиба при $x=x_0$. Действительно, если $y=x^4$, то $y'=4x^3$ и $y''(x)=0$; но $x=0$ — точка минимума, а не перегиба графика данной функции.

9. Кривизна плоских линий. Рассмотрим лежащие в одной плоскости простые дуги L_1 и L_2 класса C^2 , имеющие одинаковую выпуклость, фиксированную общую внутреннюю точку M_0 и в ней — общую касательную l_{M_0} (рис. 7). Пусть M — текущая точка прямой l_{M_0} ; m — перпендикуляр к l_{M_0} в точке M , а M_1 и M_2 — его точки пересечения с линиями L_1 и L_2 соответственно. Предположим, что существует отрезок I касательной l_{M_0} , содержащей M_0 в качестве внутренней точки такой, что

$$|MM_1| < |MM_2|, M \in I \setminus \{M_0\},$$

(см. рис. 7). Будем говорить в этом случае, что в окрестности точки M_0 кривая L_1 менее искривлена (или обладает меньшей

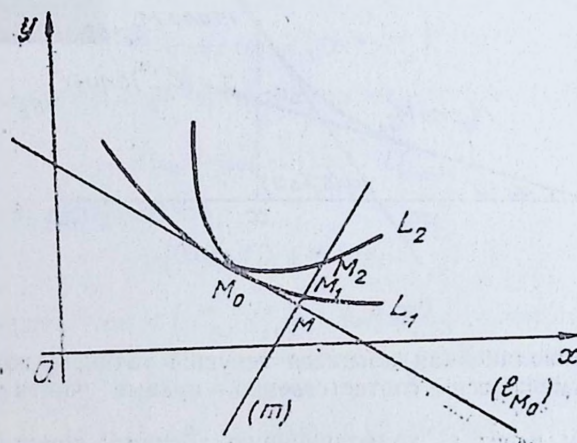


Рис. 7

искривленностью), чем линия L_2 . Сказанное выше позволяет утверждать также, что в окрестности разных точек кривой ее искривленность в общем случае не одна и та же.

Для математического описания свойств линий и исследования движений по криволинейным траекториям необходимо строго определить и выразить числом то, что с точки зрения геометрической наглядности может быть названо «искривленностью» кривой. Ниже это сделано.

Пусть $M_0(x_0; y_0)$ — фиксированная внутренняя, а $M(x; y)$ — текущая точки простой дуги L класса C^2 (рис. 8)¹⁰, являющейся графиком функции

$$y = f(x), \quad x \in I_x^1 \quad (1.113)$$

и обладающей параметрическим представлением

$$x = x(t), \quad y = y(t); \quad t \in I. \quad (1.114)$$

Согласно доказанному в п.1.2.4 линия L допускает натуральную параметризацию (предполагается, что на L выбраны начало отсчета длины и ориентация)

$$x = x(s), \quad y = y(s); \quad s \in I_s. \quad (1.115)$$

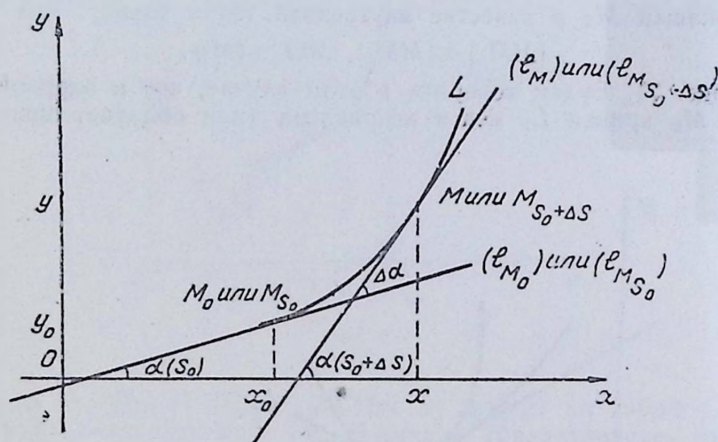


Рис. 8

Здесь s — криволинейная абсцисса текущей точки, а под $x(s)$ и $y(s)$ подразумеваются соответственно правые части равенств (1.50).

Обозначим через s_0 криволинейную абсциссу точки M_0 . Тогда x_0, y_0 и s_0 связаны соотношениями $x_0 = x(s_0)$, $y_0 = y(s_0)$. Положим

$$\Delta s = s - s_0. \quad (1.116)$$

Всюду в дальнейшем будем считать выполненным условие

$$\Delta s \neq 0. \quad (1.117)$$

¹⁰ Здесь и далее принадлежность всех встречающихся функций и линий классу C^2 существенна. В предыдущем достаточно было погребовать существования непрерывных производных первого порядка.

¹¹ Через I_x и I_s обозначим числовые промежутки, пробегаемые переменными x и s .

Из (1.116) следует, что $|\Delta s| = |\overline{M_0 M}|$, а знак приращения Δs зависит от ориентации кривой L и от взаимного расположения точек M_0 и M . Вместо M_0 и M в последующем приняты также обозначения M_{s_0} и $M_{s_0 + \Delta s}$ соответственно.

Поскольку линия L отлична от прямой, можно считать, не уменьшая общности результатов, точку M_0 выбранной так, что $f''(x_0) \neq 0$ ¹². Отсюда вытекает, что при достаточно малом $|\Delta s|$ вторая производная f'' не меняет знак на отрезке с концами x_0 и x (им является $[x_0; x]$ при $x > x_0$ и $[x; x_0]$, если $x < x_0$), следовательно, дуга $[M_0 M]$ всюду выпукла вверх (в случае, когда $f'' < 0$ на указанном отрезке) или вниз (при $f'' > 0$).

Обозначим через l_{M_0} и l_M касательные к кривой L в точках M_0 и M ; вместо l_{M_0} и l_M будем писать также $l_{M_{s_0}}$ и $l_{M_{s_0 + \Delta s}}$ (или $l_{M_{s_0 + \Delta s}}$) (в силу условия $L \in C^2$ эти касательные существуют и однозначно определены).

Пусть α — величина угла между лучами $(0x^+)$ и l_M^+ (см. рис. 8):

$$\alpha = \alpha(s) = \widehat{(0x^+; l_M^+)}. \quad (1.118)$$

Соотношение (1.118) представимо вследствие (1.116) в виде

$$\alpha(s_0 + \Delta s) = \widehat{(0x^+; l_{M_{s_0 + \Delta s}}^+)}. \quad (1.119)$$

Из (1.118) вытекает, что

$$\widehat{(0x^+; l_{M_{s_0}}^+)} = \alpha(s_0). \quad (1.120)$$

Очевидно, что $\widehat{(l_{M_{s_0}}^+; l_M^+)}$ является углом поворота касательной к линии L при переходе точки касания из M_0 в положение M ; $\widehat{(l_{M_{s_0}}^+; l_M^+)}$ называется углом смежности касательных $(l_{M_{s_0}}^+)$ и (l_M^+) . Он не зависит от выбора системы координат. Его величина может служить числовой характеристикой искривленности дуги $[M_0 M]$. Имеем

$$\begin{aligned} \widehat{(l_{M_{s_0}}^+; l_M^+)} &= \widehat{(0x^+; l_M^+)} - \widehat{(0x^+; l_{M_{s_0}}^+)} = \\ &= \widehat{(0x^+; l_{M_{s_0 + \Delta s}}^+)} - \widehat{(0x^+; l_{M_{s_0}}^+)} = \alpha(s_0 + \Delta s) - \alpha(s_0) = \Delta \alpha. \end{aligned} \quad (1.121)$$

¹² Если $f''(x) = 0$ для всех $x \in I_x$, то $f(x) = ax + b$, где $a, b = \text{const}$, значит L — отрезок прямой. Если $f''(x_0) = 0$, но существует такое $\epsilon > 0$, что $f''(x) \neq 0$ при $x_0 - \epsilon < x < x_0$ и при $x_0 < x < x_0 + \epsilon$, то M_0 либо точка перегиба кривой L , либо точка экстремума функции f .

При одном и том же угле смежности искривленность дуги $[\overline{M_0 M}]$ будет зависеть от ее длины. Поэтому уточнение указанной числовой характеристики достигается рассмотрением отношения $\frac{\Delta s}{\Delta x}$. Оно называется средней кривизной дуги $[\overline{M_0 M}]$ и описывает ее искривленность тем лучше, чем меньше $|\Delta s|$. Докажем, что при выполнении условия $L \in C^2$ предел $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta s}$ существует и конечен.

Если L — простой криволинейный отрезок в координатной плоскости (xOy) , задаваемый уравнением (1.106), то s и α — функции абсциссы x . Очевидно, что

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{\Delta x}{\Delta x} : \frac{\Delta s}{\Delta x} \quad (1.122)$$

(из (1.110) следует, что $\Delta x \neq 0$, значит обе части равенства (1.122) определены). Как показано в п. 1.2.4, 1.2.5, $\alpha \in C'$ (если $f'(x_0) = 0$, то под $\alpha'(x_0)$ будем подразумевать на основании (1.92) число $f''(x_0)$) и $s \in C'$, следовательно, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x}$ и $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x}$ существуют в каждой точке $M_0 \in L$, причем $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} \neq 0$ (ибо $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2} \geq 0$). Кроме того, если $\Delta x \rightarrow 0$, то $\Delta s \rightarrow 0$, и наоборот. Поэтому для всех $M_0 \in L$ существует предел $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta s}$. Он называется кривизной линии L в точке M_0 обозначается через $k = k(M_0)$ или $\kappa = \kappa(M_0)$ и является действительным числом, характеризующим степень искривленности дуги L в бесконечно малой криволинейной окрестности точки M_0 . По определению

$$k(M_0) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta s}. \quad (1.123)$$

Иногда необходимо указать, что $k(M_0)$ зависит от кривой L . Вместо $k(M_0)$ будем писать $k(L; M_0)$ (это читается «кривизна линии L в точке M_0 »).

Выведем формулы, позволяющие вычислить $k(M_0)$. Из (1.122), (1.123), (1.56) и (1.58) следует, что при любом $x_0 \in I_x$

$$\begin{aligned} k(M_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} : \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{dx}{dx} : \frac{ds}{dx} = \\ &= \frac{f''(x_0)}{1 + (f'(x_0))^2} : \sqrt{1 + (f'(x_0))^2} = \frac{f''(x_0)}{(1 + (f'(x_0))^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (1.124)$$

В силу (1.124) $k(M_0)$ имеет тот же знак, что и $f''(x_0)$ (ибо $(1 + f'^2(x_0))^{3/2} > 0$), значит на основании сказанного в п. 1.2.7 число $k(M_0)$ положительно (отрицательно) тогда и только тог-

да, когда в точке M_0 линия L выпукла вниз (вверх); $k(M_0) = 0$ при $f''(x_0) = 0$ и только в этом случае. В частности, если M_0 — точка перегиба, то $k(M_0) = 0$. Обратное утверждение неверно, ибо равенство $L(M_0) = 0$ может выполняться и тогда, когда M_0 — точка экстремума.

Пусть L — произвольная простая дуга класса C^2 , а $y = f(x)$ — ее уравнение. Функция $k = k(x)$, задаваемая формулой

$$k(x) = \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}, \quad (1.125)$$

называется кривизной линии L в точке с абсциссой x . Из (1.124), (1.125) и теоремы о производной сложной функции следует, что

$$k = \frac{dz}{ds}, \quad (1.126)$$

где под $\alpha = \alpha(s)$ следует подразумевать функцию, задаваемую равенствами (1.107).

Сформулированное посредством равенства (1.123) определение кривизны основано только на понятиях длины дуги и величины угла смежности; оба они не зависят ни от выбора системы координат, ни от способа аналитического задания линии L . Вследствие этого $k(M_0)$ также не зависит от системы координат и от способа задания кривой L . Отсюда вытекает, что указанное определение кривизны сохраняет силу для произвольной плоской линии класса C^2 . Пусть она задана параметрически уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Тогда α и s , а следовательно, и k — функции переменной t . Поэтому вместо (1.122) воспользуемся равенством

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{\Delta x}{\Delta t} : \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (1.127)$$

В силу доказанного в п. 4 и 5 $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ и $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ стремятся при $\Delta t \rightarrow 0$ к конечным пределам, значения которых даются формулами (1.98) и (1.48). Поэтому переход к пределу в левой части равенства (1.128) при $\Delta s \rightarrow 0$, а в правой — при $\Delta t \rightarrow 0$ допустим. Выполнив его, находим на основании (1.97) и (1.48)

$$k = \frac{dx}{dt} : \frac{ds}{dt} = \frac{\dot{x}(t) \ddot{y}(t) - \ddot{x}(t) \dot{y}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}}. \quad (1.128)$$

Равенство (1.128) справедливо, какова бы ни была параметризация линии L . Следовательно, оно имеет место и при ее натуральной параметризации. В этом случае оно примет вид

$$k = \frac{x'(s) y''(s) - x''(s) y'(s)}{([x'(s)]^2 + [y'(s)]^2)^{3/2}}. \quad (1.129)$$

В силу (1.57) и (1.129)

$$k = x'(s) y''(s) = x''(s) y'(s). \quad (1.130)$$

Ввиду того что $L \in C^2$, дифференцирование обеих частей (1.57) допустимо. Выполняя его, находим

$$x'(s)x''(s) + y'(s)y''(s) = 0, \quad (1.131)$$

откуда

$$x'' = -\frac{y'y''}{x'} \quad (1.132)$$

при $x' \neq 0$.

Из (1.130), (1.132) и (1.57) следует

$$k = x'y'' + \frac{y'^2 y''}{x'^2} = \frac{y''(s)}{x'(s)}. \quad (1.133)$$

Тем самым кривизна выражена через натуральный параметр.

10. Кривизна прямой и окружности. Уравнение любой прямой, не параллельной оси ординат, представимо в виде $y = ax + b$

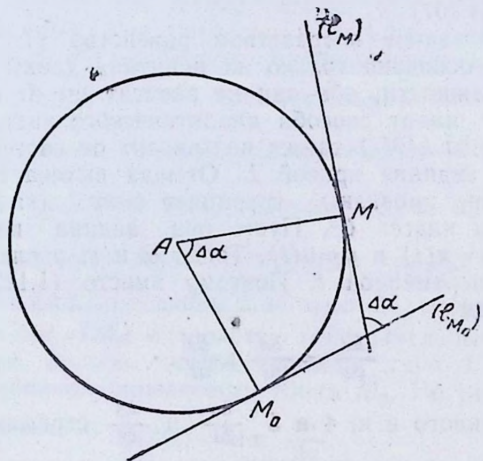


Рис. 9

($a, b = \text{const}$), откуда $y'' = 0$, значит в силу (1.126) $k = 0$, т. е. в каждой точке прямой ее кривизна равна нулю. Допустим, наоборот, что кривизна линии $L: y = y(x)$ тождественно равна нулю:

$$k = 0 \quad (1.134)$$

для всех x .

Из (1.126) и (1.134) следует, что $y''(x) = 0$, откуда $y' = C_1$, а $y = C_1 x + C_2$ ($C_1, C_2 = \text{const}$), т. е. L — прямая. Таким образом, нулевой кривизной обладают прямые и только они.

Пусть (рис. 9) M_0 — фиксированная, M — текущая точки окружности с центром A и радиусом длины R ; $0 < M_0 A M < \pi$;

(l_{M_0} и l_M) — касательные к окружности в точках M_0 и M соответственно.

$$\Delta s = |\widehat{M_0 M}| \quad (1.135)$$

$$\Delta \alpha = (\widehat{l_{M_0}^+; l_M^+}). \quad (1.136)$$

Тогда

$$(l_{M_0}) \perp (A M_0), (l_M) \perp (A M). \quad (1.137)$$

В силу (1.136) и (1.137) и теоремы об углах со взаимно перпендикулярными сторонами

$$M_0 A M = (\widehat{l_{M_0}^+; l_M^+}), \quad (1.138)$$

а на основании (1.135), (1.136), (1.138) и соотношения между длиной дуги и величиной ее центрального угла $\Delta s = R \Delta \alpha$, откуда $\frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{1}{R} = \text{const}$, значит, $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s}$ существует и равен $\frac{1}{R}$, т. е.

$$k = \frac{1}{R}. \quad (1.139)$$

Тем самым установлено, что кривизна окружности постоянна и равна $\frac{1}{R}$, где R — длина радиуса.

Верно и обратное: если кривизна линии L постоянна и отлична от нуля, то L — окружность. Доказательство этого утверждения основано на том, что соотношение $k = a$ ($a = \text{const} \neq 0$) равносильно, на основании (1.125), дифференциальному уравнению

$$\frac{y''}{(1 - y'^2)^{3/2}} = a,$$

общим решением которого служит, как легко убедиться,

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = \frac{1}{a^2}$$

(C_1 и C_2 — произвольные постоянные); это уравнение семейства окружностей с центрами ($C_1; C_2$) и радиусом одинаковой длины $\frac{1}{|a|}$.

11. Радиус и центр кривизны. Пусть $M_0(x_0; y_0)$ — внутренняя точка простого отрезка $L: y = y(x)$ линии класса C^2 . Предположим, что $k(M_0) \neq 0$, тогда в силу (1.125) $y''(x_0) \neq 0$, вследствие чего, согласно сказанному в п. 1.2.7, достаточно малая криволинейная окрестность L^{13} точки M_0 лежит целиком в одной из по-

¹³ Эти условия определяют, и при том однозначно, указанную окружность. Длина ее радиуса равна $1/k(L; M_0)$ (см. п. 1.2.10). В точке M_0 линия L и данная окружность имеют общую касательную.

луплодкостей, на которые касательная l_{M_0} разбивает координатную плоскость xOy . Обозначим через $(n_{M_0}^*)$ луч нормали (n_{M_0}) (см. п. 1.2.6), расположенный по ту же сторону от прямой (l_{M_0}) что и дуга L . Лежащая в плоскости (xOy) и проходящая через M_0 окружность с центром на луче $(n_{M_0}^*)$ и кривизной, равной $k(L; M_0)$, называется кругом кривизны или соприкасающейся окружностью линии L в точке M_0 . Через ρ или $\rho(M_0)$ обозначается длина радиуса круга кривизны. Из (1.139) и определения соприкасающейся окружности следует, что если $M(x, y)$ — произвольная точка линии L класса C^2 , не являющаяся точкой перегиба (см. п. 1.2.8, 1.2.9), то

$$\rho(M) = \frac{1}{|k(L; M)|}. \quad (1.140)$$

В силу (1.140), (1.126), (1.125) и (1.133) имеют место формулы

$$\rho = \left| \frac{ds}{dx} \right|, \quad (1.141)$$

$$\rho = \frac{1}{|y''(x)|} (1 + [y'(x)]^2)^{3/2} \quad (1.142)$$

и

$$\rho = \left| \frac{y''(s)}{x'(s)} \right|, \quad x'(s) \neq 0. \quad (1.143)$$

В случае натуральной параметризации вместо $\rho(M)$ пишут также $\rho(s)$. Функция ρ называется радиусом кривизны линии L в точке M . Если L — прямая, а M — точка, в которой $y''=0$ (в частности, если M — точка перегиба), то полагают $\rho = +\infty$.

12. Пространственные кривые. Введем в пространстве неподвижную прямоугольную систему координат $Oxyz$. Пусть $x=x(t)$, $y=y(t)$ и $z=z(t)$ — заданные числовые функции класса $C^2(I)$; $M_t(x(t), y(t), z(t))$ — текущая (переменная) точка координатного пространства, а $\vec{r}=\vec{OM}_t$ ее радиус-вектор. Вследствие формулы (1.38) п. 1.2.1 $\vec{r}$ является векторной функцией (класса C^2) скалярного аргумента t :

$$\vec{r} \in C^2(I). \quad (1.144)$$

Обозначим ее через $\vec{r}(t)$. Она представима в виде

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \quad (1.145)$$

Допустим, что t пробегает промежуток I . Множество всех соответствующих точек M_t называется пространственной кривой

класса $C^2(I)$ или линии класса $C^2(I)$ в трехмерном пространстве; будем обозначать ее в дальнейшем через L и писать $L \in C^2(I)$. Систему равенств

$$L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad t \in I \quad (1.146)$$

именуют скалярными параметрическими уравнениями кривой L , а соотношение

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad t \in I, \quad (1.147)$$

— ее векторным уравнением.

Если t — время, то согласно принятым в механике определениям линию, описываемую концом исходящего из фиксированной точки O радиус-вектора $\vec{r}(t) = \vec{OM}_t$, называют его годографом.

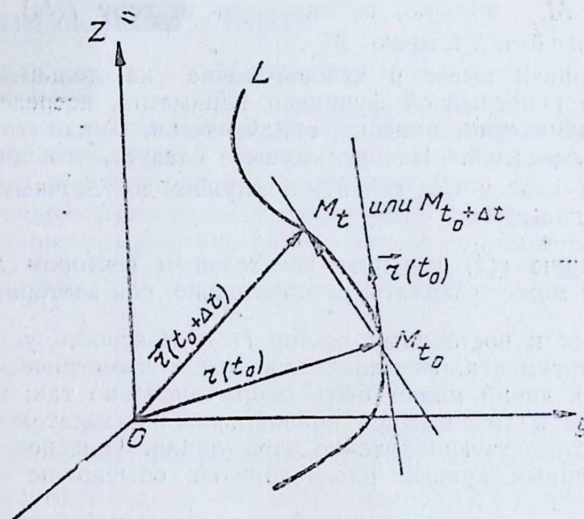


Рис. 10

13. Касательный вектор пространственной кривой. Пусть M_{t_0} — произвольная фиксированная точка линии L , а $\Delta t = t - t_0$, причем $t \neq t_0$. Тогда (рис. 10)

$$\begin{aligned} \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0) &= \\ &= \vec{OM}_{t_0 + \Delta t} - \vec{OM}_{t_0} = \vec{OM}_t - \vec{OM}_{t_0} = \vec{M}_{t_0}M_t. \end{aligned} \quad (1.148)$$

Из (1.148) следует, что при любом Δt вектор $\frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$ коллинеарен секущей (M_{t_0}, M_t) , а значит, и хорде $[M_{t_0}, M_t]$ кривой L . В силу (1.144) предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$$

существует и конечен. Пишут, как известно (см. п. 1.2.2),

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \dot{\vec{r}}(t_0)$$

(вектор $\dot{\vec{r}}(t_0)$ постоянен при фиксированном t_0) и называют $\dot{\vec{r}}(t_0)$ касательным вектором или вектором касательной к линии L в точке M_{t_0} (см. рис. 10). Проходящую через M_{t_0} прямую, коллинеарную вектору $\dot{\vec{r}}(t_0)$, именуют касательной к L в точке M_{t_0} .

Пусть кривая имеет в каждой точке касательный вектор, являющийся непрерывной функцией параметра, посредством которого данная линия описана аналитически. Такая кривая называется гладкой. Из предыдущего следует, что принадлежность линии классу C^k , где $k \geq 1$, служит достаточным условием ее гладкости.

Производную $\dot{\vec{r}}(t)$ именуют касательным вектором линии L . Этот термин может означать, следовательно, как векторную функцию $\dot{\vec{r}}(t)$, так и постоянный вектор $\dot{\vec{r}}(t)$. Неясность устраняется указанием аргумента. Установленное выше геометрическое свойство гладких линий может быть сформулировано так: производная текущего радиус-вектора кривой является касательным вектором в соответствующей точке этой линии. При исследовании пространственных кривых рассматривают обычно не касательную, как в случае плоских линий, а касательный вектор $\dot{\vec{r}}$.

В силу (1.144)

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}, \quad (1.149)$$

а на основании (1.149) и формулы (1.10)

$$|\dot{\vec{r}}(t)| = \sqrt{\dot{r}^2(t)} = \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2 + [\dot{z}(t)]^2}. \quad (1.150)$$

Потребуем, чтобы производные $\dot{x}$, $\dot{y}$ и $\dot{z}$ не обращались одновременно в нуль ни при каком значении переменной. Это равносильно условию

$$(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2 > 0, \quad t \in I. \quad (1.151)$$

Из (1.151) следует, что

$$|\dot{\vec{r}}(t)| \neq 0, \quad t \in I. \quad (1.152)$$

14. Натуральная параметризация пространственных линий. Все сказанное в п. 1.2.3, 1.2.4 о длине дуги, спрямляемости, натуральной параметризации остается в силе применительно к пространственным кривым, если во всех формулах, содержащих сумму $\dot{x}^2 + \dot{y}^2$ заменить ее через $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$. Это влечет за собой следующее обобщение равенства (1.48)

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2 + [\dot{z}(t)]^2} \quad (1.153)$$

($s=s(t)$ — длина дуги пространственной линии, заданной уравнениями (1.146)). В силу (1.153) и (1.150)

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{\vec{r}}(t)|, \quad (1.154)$$

а на основании (1.153) и (1.151)

$$\frac{ds}{dt} > 0, \quad t \in I. \quad (1.155)$$

Пусть в качестве параметра принята криволинейная абсцисса s текущей точки линии L (см. п. 1.2.4), т. е. длина дуги этой кривой измеряется от некоторой фиксированной точки $M_{t_0} \in L$ (положительное направление отсчета переменной s считается заданным). Тогда векторное уравнение данной линии записывается в виде

$$\vec{r} = \vec{r}(s), \quad (1.156)$$

или

$$\vec{r} = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}; \quad (1.157)$$

назовем его натуральной параметризацией кривой L (под правой частью равенства (1.156) подразумевается в действительности $\vec{r}(t)|_{t=g(s)} = \vec{r}(g(s))$, где $t=g(s)$ обратная к $s=s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{[\dot{x}(\theta)]^2 + [\dot{y}(\theta)]^2 + [\dot{z}(\theta)]^2} d\theta$ функция; аналогич-

но относится к $x(s)$, $y(s)$ и $z(s)$. Если $\vec{r}(t) \in C^2$, то (вследствие теорем о дифференцируемости сложной и обратной функций) и $\vec{r}(s) \in C^2$ (класс кривой сохраняется при переходе к натуральной параметризации).

Будем обозначать через M_s текущую (т. е. имеющую криволинейную абсциссу s) точку линии, заданной уравнением вида (1.156) или (1.157).

Введение криволинейной абсциссы s в качестве аргумента позволяет представить соотношение (1.154) в виде

$$\left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = 1 \quad (1.158)$$

или, что то же,

$$ds^2 = d\vec{r}^2, \quad (1.159)$$

(под ds^2 и $d\vec{r}^2$ подразумеваются соответственно $(ds)^2$ и скалярный квадрат $(d\vec{r})^2$ вектора $d\vec{r}$). Равенство (1.159), которому можно придать форму $ds = |d\vec{r}|$, имеет место лишь применительно к спрямляемым кривым (только в этом случае дифференциал ds существует) и допускает простое геометрическое истолкование.

Оно показано на рис. 11 и основано на том, что $d\vec{r}$ — длина хорды, соединяющей концы дуги, длина которой равна ds . С точностью до бесконечно малых слагаемых высших порядков длину этой дуги можно заменить длиной ее хорды.

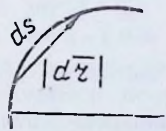


Рис. 11

Выражение ds^2 , встречающееся часто при аналитическом исследовании линий и поверхностей, называется квадратом дифференциала длины дуги.

15. Единичный вектор касательной к кривой. Равенство (1.158) означает, что $\vec{r}'(s)$ — единичный вектор. Из сказанного в п. 13 о производной текущего радиус-вектора гладкой кривой следует, что $\vec{r}'(s)$ — касательный вектор линии L в точке с криволинейной абсциссой s . Таким образом, если $\vec{r} = \vec{r}(s)$ — натуральная параметризация линии класса C^1 , то $\vec{r}'(s)$ — ее единичный касательный вектор. Его обозначают через $\vec{\tau} = \vec{\tau}(s)$:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}(s). \quad (1.160)$$

В тех случаях, когда необходимо указать, что $\vec{\tau}$ — единичный вектор касательной к кривой L , будем писать $\vec{\tau}(L; s)$ вместо $\vec{\tau}(s)$. В силу (1.158) и (1.160)

$$|\vec{\tau}(s)| = 1. \quad (1.161)$$

Формула (1.161) и $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, где $\vec{a}$ — произвольный вектор (см. п. 1.1.4), влекут за собой соотношение

$$\vec{\tau}^2(s) = 1, \quad (1.162)$$

которое в дальнейшем приведет к важным следствиям.

Из (1.157) и (1.160) следует, что

$$\vec{\tau}(s) = x'(s)\vec{i} + y'(s)\vec{j} + z'(s)\vec{k}. \quad (1.163)$$

16. Главная нормаль и ее единичный вектор. Через любую точку M_s гладкой линии L проходит одна и только одна плоскость, ортогональная вектору $\vec{\tau}(s)$; ее именуют нормальной плоскостью кривой L в точке M_s . Каждая прямая, проходящая через M_s и лежащая в нормальной плоскости, перпендикулярна вектору $\vec{\tau}(s)$ и называется нормалью линии L в точке M_s . Кривая L имеет, следовательно, в любой из своих точек бесконечное множество нормалей. Две из них могут быть выделены естественным образом посредством дифференцирования и векторного умножения. Ниже это выполнено.

Пусть $\vec{r}(s) \in C^2$. Тогда, в силу (1.144) и (1.160), $\vec{\tau}(s) \in C^1$, вследствие чего допустимо дифференцирование обеих частей (1.162).

Оно приводит к равенству $2\vec{\tau}\vec{\tau}' = 0$, т. е.

$$\vec{\tau}(s) \frac{d\vec{\tau}}{ds} = 0 \quad (1.164)$$

(левая часть (1.164) — скалярное произведение, ибо им является и $\vec{\tau}^2$). Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные векторы, то $\vec{a}\vec{b} = 0$ тогда и только тогда, когда $\vec{a} \perp \vec{b}$. Поэтому из (1.164) вытекает, что

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} \perp \vec{\tau}(s), \quad (1.165)$$

значит, прямая, параллельная вектору $\vec{\tau}'(s)$ и проходящая через M_s , является одной из указанных нормалей; ее именуют главной нормалью кривой L в точке M_s . Для плоских линий главная нормаль совпадает с определенной в п. 6 нормалью плоской кривой.

Из (1.165) и (1.161) видно, что главная нормаль существует лишь у линий класса C^2 и притом в точках, где $\vec{\tau}'(s) \neq 0$. Определяющий ее направление вектор $\vec{\tau}'(s)$ в общем случае не является единичным. Обозначим его орт через $\vec{n} = \vec{n}(s)$. Тогда

$$\vec{n}(s) = \frac{1}{|\vec{\tau}'(s)|} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds}, \quad \vec{\tau}'(s) \neq 0; \quad (1.166)$$

$\vec{n}(s)$ называется единичным вектором главной нор-

малы кривой L в точке M_s . Если необходимо указать на то, что $\vec{n}$ зависит от L , следует писать $\vec{n}(L; s)$ вместо $\vec{n}(s)$.

Для выяснения геометрического смысла множителя $|\tau'(s)|^{-1}$, входящего в правую часть (1.166), нужно распространить на пространственные линии понятие кривизны.

17. Кривизна пространственной линии. Обобщением на случай пространственных кривых понятия «угол смежности касательных к гладкой дуге $[M_{s_0} M_{s_0+\Delta s}]$ в точках M_{s_0} и $M_{s_0+\Delta s}$ » служит $\angle(\vec{\tau}(s_0); \vec{\tau}(s_0 + \Delta s))$. Поэтому в качестве количественной характеристики искривленности указанной дуги может быть принято число

$$|\vec{\tau}(s_0 + \Delta s) - \vec{\tau}(s_0)| = |\Delta \vec{\tau}|. \quad (1.167)$$

Как и для плоских линий, уточненной мерой степени искривленности данной дуги является отношение

$$\left| \frac{\vec{\tau}(s_0 + \Delta s) - \vec{\tau}(s_0)}{\Delta s} \right| = \left| \frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta s} \right|, \quad (1.168)$$

именуемое средней кривизной рассматриваемой дуги. Пусть $\vec{r} \in C^2$. Тогда предел выражения (1.168) при $\Delta s \rightarrow 0$ существует и равен $|\tau'(s_0)|$, так как

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{\tau}(s_0 + \Delta s) - \vec{\tau}(s_0)}{\Delta s} = \vec{\tau}'(s_0); \quad (1.169)$$

число $|\tau'(s_0)|$ называется кривизной линии L в точке M_{s_0} . Тем самым для любой кривой $L \in C^2$ определена функция

$$\kappa = \kappa(L; s) = |\tau'(L; s)|, \quad (1.170)$$

называемая кривизной данной линии. Если неясность исключена, то вместо (1.170) может быть использована более простая запись

$$\kappa = \kappa(s) = |\tau'(s)|. \quad (1.171)$$

В силу (1.171) и (1.163)

$$\kappa = |\vec{r}''(s)| = \sqrt{[x''(s)]^2 + [y''(s)]^2 + [z''(s)]^2}. \quad (1.172)$$

Из (1.166) и (1.171) следует равенство

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \kappa(s) \vec{n}. \quad (1.173)$$

Оно называется первой формулой Френе для пространственных кривых класса C^2 . Остальные формулы Френе (их всего три) в дальнейшем не используются, поэтому их не приводим.

Покажем, что кривизна плоской линии класса C^2 , определенная ранее (п. 1.2.9), представляет собой частный случай кривизны пространственной кривой. Совместим начала единичных векторов $\vec{\tau}(s_0)$ и $\vec{\tau}(s_0 + \Delta s)$ (в силу (1.161) $|\vec{\tau}(s_0 + \Delta s)| = 1$).

Пусть (см. рис. 11) $\vec{\tau}(s_0) = \vec{AB}$, $\vec{\tau}(s_0 + \Delta s) = \vec{AC}$. Тогда $\angle BAC$ является обобщением применительно к произвольной пространственной линии класса C^2 понятия угла смежности касательных к дуге $[M_{s_0} M_{s_0+\Delta s}]$ в точках M_{s_0} и $M_{s_0+\Delta s}$ (см. п. 1.2.9). Положим, по определению.

$$\Delta \alpha = \widehat{BAC} = \angle(\vec{\tau}(s_0); \vec{\tau}(s_0 + \Delta s)), \quad (1.174)$$

вследствие чего $\Delta \alpha > 0$. В силу (1.174) и непрерывности функции $\vec{\tau}(s)$ при $s = s_0$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \Delta \alpha = 0.$$

Из ΔBAC , в котором $|AB| = |AC| = 1$, $|BC| = |\vec{\tau}(s_0 + \Delta s) - \vec{\tau}(s_0)| = |\Delta \vec{\tau}|$, $|BM| = |MC|$ и $M \in [BC]$, находим $|\Delta \vec{\tau}| = 2|BM| = 2|AB| \sin \widehat{BAM} = 2 \sin \frac{\Delta \alpha}{2}$, значит (предполагаем, что $\Delta s > 0$),

$$\frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \left| \frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta s} \right| : \frac{\sin \frac{\Delta \alpha}{2}}{\frac{\Delta \alpha}{2}}. \quad (1.175)$$

Пределы $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta s}$ [см. (1.169)] и $\lim_{\Delta \alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta \alpha}{2}}{\frac{\Delta \alpha}{2}}$ существуют и равны соответственно $\vec{\tau}'(s_0)$ и 1. На основании этого равенства (1.175) и теоремы о пределе отношения существует и $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s}$, причем

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = |\tau'(s_0)|. \quad (1.176)$$

Сопоставление соотношений (1.121), (1.123), (1.170) и (1.176) приводит к следующему выводу. Пусть кривизна плоской линии вычислена по формуле (1.172) (при $z=0$), выведенной исходя из определения кривизны пространственной кривой. Полученное значение κ равно по абсолютной величине кривизне, даваемой любым из равенств (1.125), (1.128), (1.130) и (1.133), вытекающих из определения кривизны плоской дуги. Таким образом,

формулируемые различным образом определения кривизны плоской и пространственной линий приводят в случае двумерных кривых к значениям κ , одинаковым по модулю и могущим отличаться только знаком. Легко понять причину этого неполного совпадения. Она заключается в том, что для простых дуг плоских кривых вводятся понятия выпуклости и вогнутости (п. 1.2.7). Как показано в п. 1.2.9, кривизна плоской линии L в точке положительна или отрицательна в зависимости от того, выпукла или вогнута кривая L в данной точке. Применительно к пространственным линиям не могут быть определены выпуклость и вогнутость; это согласуется с тем, что по выражаемому формулой (1.170) определению кривизна пространственной линии всегда неотрицательна.

18. Соприкасающаяся плоскость. При любом положении, занимаемом текущей точкой M_s линии $L: \vec{r}=\vec{r}(s)$ класса C^2 (предполагаем, что $\vec{r}'(s) \neq 0$ для всех $s \in D(\vec{r})$)¹⁴, через M_s проходит одна и только одна плоскость, параллельная каждому из векторов $\vec{\tau}(s)$ и $\vec{n}(s)$ (если $\vec{\tau}(s)$ и $\vec{n}(s)$ исходят из M_s то они лежат в этой плоскости). Обозначим ее через $(L; \vec{\tau}, \vec{n}; s)$. Она называется соприкасающейся плоскостью кривой L в точке M_s .

Пусть s_1 и s_2 — два различных значения параметра s . Тогда в общем случае $\vec{\tau}(s_1) \neq \vec{\tau}(s_2)$ и $\vec{n}(s_1) \neq \vec{n}(s_2)$, значит, в разных точках пространственной линии L ее соприкасающиеся плоскости, как правило, непараллельны. Кинематический смысл этого утверждения заключается в том, что при движении точки M_s при кривой L плоскость $(L; \vec{\tau}; \vec{n}; s)$ изменяет свою пространственную ориентацию.

Если L — плоская линия, то в каждой ее точке соприкасающаяся плоскость одна и та же, а именно та, в которой лежит кривая L .

19. Радиус кривизны пространственной кривой. Легко видеть, что если $L: \vec{r}=\vec{r}(s)$ — произвольная пространственная линия класса C^2 , то для любого $s_0 \in D(\vec{r})$ такого, что $\vec{r}'(s_0) \neq 0$ существует, и притом единственная, окружность, удовлетворяющая всем следующим условиям:

- 1) она расположена в плоскости $(L; \vec{\tau}; \vec{n}; s_0)$;
- 2) ее центр лежит на луче главной нормали к L в точке M_{s_0} , направление которого определяется вектором $\vec{n}(s_0)$;
- 3) она проходит через M_{s_0} ;

¹⁴ Через $D(f)$ обозначается область определения векторной или скалярной функции f .

4) ее кривизна равна $\kappa(L; s_0)$.

Пусть $\rho(L; s_0)$ — длина радиуса этой окружности; в тех случаях, когда это не может быть причиной неясности, будем писать $\rho(s_0)$ вместо $\rho(L; s_0)$. В силу (1.118)

$$\rho(L; s_0) = \frac{1}{\kappa(L; s_0)}. \quad (1.177)$$

Из (1.177), (1.167) и (1.172) следует, что для любого $s \in D(\vec{r})$, удовлетворяющего условию $\vec{\tau}'(s) \neq 0$,

$$\rho(s) = \frac{1}{|\vec{\tau}'(s)|} = \frac{1}{|\vec{r}''(s)|}. \quad (1.178)$$

На основании (1.177) и (1.173) первая формула Френе примет вид

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho(s)} \vec{n}(s). \quad (1.179)$$

20. Сопровождающий трехгранник. Векторы $\vec{\tau}(L; s)$ и $\vec{n}(L; s)$ получены исходя из кривой L и поэтому внутренне связаны с ней (в отличие, например, от $\vec{i}$; $\vec{j}$ и $\vec{k}$, которые непосредственного отношения к линии L не имеют и могут быть выбраны любым способом; должно быть соблюдено лишь требование $(\vec{i}, \vec{j}) = (\vec{j}, \vec{k}) =$

$=(\vec{k}, \vec{i}) = \frac{\pi}{2}$). Для всех $s \in D(\vec{r})$, удовлетворяющих условию

$\vec{r}'(s) \neq 0$, орты $\vec{\tau}(s)$ и $\vec{n}(s)$ взаимно перпендикулярны; они определяют, следовательно, прямоугольную систему координат в

плоскости $(L; \vec{\tau}, \vec{n}; s)$. Обозначим эту систему через $(\vec{\tau}(s); \vec{n}(s))$ (в тех случаях, когда это не может стать причиной неясности,

вместо $\vec{\tau}(s); \vec{n}(s)$) будем писать $(\vec{\tau}; \vec{n})$. Как видно из предыдущего, она не взята произвольным образом, а органически связана с рассматриваемой кривой. В этом преимущество системы отсчета

$(\vec{\tau}; \vec{n})$. Ее недостаток заключается в следующем. Если L — пространственная линия, то, как правило, даже бесконечно малая ее

дуга, содержащая точку M_{s_0} , не расположена в плоскости $(L; \vec{\tau}; \vec{n}; s)$. Поэтому кривая L не может быть исследована с помощью

системы $(\vec{\tau}(s_0), \vec{n}(s_0))$ даже в сколь угодно малой окрестности точки M_{s_0} . Чтобы сделать возможным это исследование, допол-

ним систему координат $(\vec{\tau}(s), \vec{n}(s))$ до пространственной, приняв в качестве третьей координатной оси проходящую через M_{s_0} пря-

мую (b_s), перпендикулярную плоскости ($L; \tau; n; s$). Введем положительное направление и единицу измерения длин на оси (b_s). Для этого достаточно задать ее орт. Обозначим его через $\vec{b} = \vec{b}(s)$ и покажем, что можно положить

$$\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}, \quad (1.180)$$

(в соответствии со сказанным в п. 1.1.4 с помощью знака $\times$ будем записывать векторное произведение). Действительно, в силу (1.180), (1.161) и определения векторного произведения

$$|\vec{b}| = |\vec{\tau}| (|\vec{n}| \sin(\widehat{\tau; n}) = 1, \quad (1.181)$$

$$(\vec{\tau}; \vec{b}) = (\vec{n}; \vec{b}) = \frac{\pi}{2}, \quad (1.182)$$

значит, $\vec{b}(s)$ — единичный вектор, ортогональный плоскости ($L; \tau; n; s$), т. е.

$$\vec{b} \parallel (b_s). \quad (1.183)$$

Из (1.182), (1.183) и определения нормали к пространственной кривой (п. 1.2.16) следует, что прямая (b_s) — одна из проходящих через точку M_s нормалей к L , она называется бинормалью.

Из бесконечного множества всех нормалей линии L в точке M_s выделяются, следовательно, две: $\vec{n}(s)$ и $\vec{b}(s)$. Они образуют, в силу (1.182), ортогональный векторный базис в проходящей через M_s нормальной плоскости кривой L . На основании теоремы о разложении вектора по базису, любой вектор, нормальный линии L в точке M_s представим, и притом однозначно, в виде

$C_1 \vec{n}(s) + C_2 \vec{b}(s)$, где C_1 и C_2 — действительные числа. Тем самым отпадает необходимость рассмотрения нормалей, отличных от главной нормали и бинормали.

Из (1.180) и определения векторного произведения (п. 1.1.4) следует, что $\vec{\tau}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)$ — правый векторный базис (при любом s). Порождаемую им прямоугольную систему координат с началом отсчета M_s обозначим также через $(\tau(s); n(s); b(s))$. Ее значение в теории кривых и в динамике исключительно велико. Это обусловлено тем, что свойства, которыми обладает линия L в окрестности точки M_s , легче всего установить (а соответствующие формулы и теоремы обретают наиболее простой вид), если

пользоваться системой $(\vec{\tau}; \vec{n}; \vec{b})$ ¹⁵. Она называется сопровождающим, естественным, основным или натуральным трехгранником кривой L в точке M_s . Термин «сопровождающий» связан с физическими приложениями системы $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$, если по линии L движется точка M_s , то вместе с ней перемещается ее естественный трехгранник. При этом его координатные оси изменяют свою пространственную ориентацию,

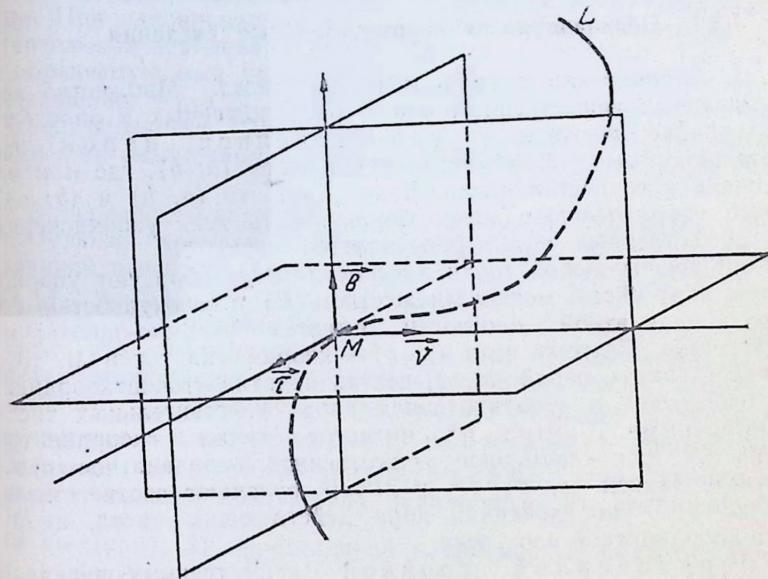


Рис. 12

т. е. он совершает не только поступательное, но и вращательное движение.

Координатные плоскости системы $(\vec{\tau}; \vec{n}; \vec{b})$ определяются следующими тремя упорядоченными парами векторов: $(\vec{\tau}; \vec{n})$, $(\vec{n}; \vec{b})$ и $(\vec{b}; \vec{\tau})$. Обозначим соответственно эти плоскости через $(L; \vec{\tau}, \vec{n}; s)$, $(L; \vec{n}, \vec{b}; s)$ и $(L; \vec{b}; \vec{\tau}; s)$. Согласно сказанному в п. 1.2.18 и 1.2.16, $(L; \vec{\tau}, \vec{n}; s)$ — соприкасающаяся, а $(L; \vec{n}, \vec{b}; s)$ — нормальная плоскости кривой L в ее текущей точке; $(L; \vec{b}; \vec{\tau}; s)$ называется спрямляющей плоскостью (рис. 12).

¹⁵ Причина заключается в том, что система $(\vec{\tau}; \vec{n}; \vec{b})$ не введена произвольным образом, а внутренне связана с линией L .

Для ознакомления с применением сопровождающего трехгранника¹⁶ к изучению кривых следует обратиться к монограммам по дифференциальной геометрии [5, 6, 8, 14, 21]. Его приложения к динамике изложены в [1, 2, 3, 12, 17, 18]. В дальнейшем сопровождающий трехгранник будет использован для исследования движения почвенных частиц по рабочей поверхности рыхлительной лапы чизель-культиватора.

1.3. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТЕЙ

1.3.1. Обозначения и вспомогательные сведения

1. Упорядоченные пары и тройки чисел. Множество двух произвольных вещественных чисел, расположенных в определенном порядке, называется упорядоченной парой действительных чисел. Она обозначается через $(a; b)$, где a и b — входящие в ее состав числа. Если $a \neq b$, то $(a; b)$ и $(b; a)$ — разные упорядоченные пары. Совокупность всех упорядоченных пар вещественных чисел обозначается через R^2 .

Координаты любой точки плоскости (Oxy) образуют упорядоченную пару чисел; между множеством R^2 и совокупностью всех точек координатной плоскости имеется взаимно-однозначное соответствие. Поэтому если $(x; y)$ — координаты точки M , то ее отождествляют с парой (x, y) , считая понятия «точка координатной плоскости» и «упорядоченная пара действительных чисел» равнозначными. Символ R^2 читается также «координатная плоскость» или «двумерное вещественное координатное пространство». Записи $(a, b) \in R^2$ и $M \in R^2$ означают соответственно, что $(a; b)$ — упорядоченная пара действующих чисел, а M — точка координатной плоскости.

Упорядоченной тройкой вещественных чисел называется множество трех, расположенных в определенном порядке, действительных чисел. Она обозначается через $(a; b; c)$, где a, b и c — входящие в ее состав числа. Совокупность всех таких упорядоченных троек именуют трехмерным вещественным координатным пространством и обозначают символом R^3 . Термины «упорядоченная тройка действительных чисел» и «точка пространства R » равнозначны.

2. Области в плоскости и в пространстве. Под областью плоскости R^2 , или связной двумерной областью, подразумевается совокупность $\mathcal{D}$ упорядоченных пар действительных чисел, т. е. точек этой плоскости, обладающая тем свойством, что для любых $A, B \in \mathcal{D}$ существует непрерывная дуга или, что в данном случае равносильно, ломаная с концами A и B , все точки которой принадлежат множеству $\mathcal{D}$ (т. е. плоская

фигура является областью, если вместе с любыми двумя точками она содержит целиком хотя бы одну соединяющую их непрерывную линию, лежащую в этой же плоскости; это свойство называется связностью). Запись $\mathcal{D} \subset R^2$ читается « $\mathcal{D}$ -область координатной плоскости».

Аналогично формулируется определение области трехмерного координатного пространства.

3. Обозначения, относящиеся к функциям нескольких переменных. При одновременном рассмотрении двух и только двух действительных переменных будем обозначать их также через u и v , а образуемую ими упорядоченную пару — символом $(u; v)$ или, сокращенно, через M ; назовем ее текущей точкой координатной плоскости (Ωuv) , где Ω — начало отсчета. Из предыдущего ясен смысл термина «точка M пробегает двумерную область $\mathcal{D}$ ».

В дальнейшем встретится и упорядоченная тройка $(x; y; z)$ действительных переменных. В тех случаях, когда это не может стать причиной неясности, будем писать M вместо $(x; y; z)$ и M_0 вместо $(x_0; y_0; z_0)$, где $x_0, y_0, z_0 = \text{const} \in R$.

Пусть задано правило или закон соответствия, согласно которому каждой упорядоченной паре $(u; v)$ поставлено в соответствие единственное действительное число. Тогда говорят, что в области $\mathcal{D}$ определена (или задана) числовая функция переменных u и v и пишут $x = f(u; v)$ или $x = x(u; v)$. Множество $\mathcal{D}$ называется областью определения этой функции. Аналогично вводятся понятия: 1) заданной в $\mathcal{D}$ векторной функ-

ции $\vec{r} = \vec{r}(u; v)$; 2) определенной в трехмерной области $\mathcal{D}$ числовой функции $F(x; y; z)$ (ее обозначают и через $F(M)$). Число $F(x_0; y_0; z_0)$ называется значением функции $F(x; y; z)$ в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Вместо $F(x_0; y_0; z_0)$ пишут и $F(M_0)$.

Упорядоченная тройка $(x_0; y_0; z_0) \in R^3$ называется решением уравнения $F(x, y, z) = 0$, если в точке (x_0, y_0, z_0) функция F определена и ее значение в этой точке равно нулю. В этом случае говорят также, что координаты точки (x_0, y_0, z_0) удовлетворяют уравнению $F(x, y, z) = 0$.

Понятие класса (п. 21) обобщается на случай функций многих переменных. Так, запись $F(x, y, z) \in C^2$ означает, что для всех допустимых значений x, y и z функция F непрерывна и обладает непрерывными частными производными первого и второго порядков (по всем переменным), включая смешанные производные $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}$ и $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}$.

Для более компактной записи частных производных первого и второго порядков числовых и векторных функций нескольких аргументов применяется символика, основанная на употреблении индексов; ими служат, как показано ниже, переменные, по

¹⁶ В данном случае слово «трехгранник» указывает на трехгранный угол, образуемый положительными лучами координатных осей системы $(\tau; \eta; \bar{b})$.

которым выполняется дифференцирование. Пусть функции $x = x(u; v)$ и $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ принадлежат классу C^2 . Тогда могут быть использованы сокращенные обозначения, вводимые посредством равенств

$$x_u = \frac{\partial x}{\partial u}; \quad x_v = \frac{\partial x}{\partial v}; \quad (1.184)$$

$$x_{uu} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}; \quad x_{uv} = x_{vu} = \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}; \quad x_{vv} = \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \quad (1.185)$$

(смысл символов $y_u, y_v, z_u, z_v, y_{uu}, z_{uu}$ и т. п. аналогичен),

$$\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}; \quad \vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}; \quad (1.186)$$

$$\vec{r}_{uu} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2}; \quad \vec{r}_{uv} = \vec{r}_{vu} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial v}; \quad \vec{r}_{vv} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2}. \quad (1.187)$$

В дальнейшем будет применяться неоднократно полный дифференциал $d\vec{r}$ векторной функции $\vec{r}(u, v)$ класса C^1 . По определению [5, 8, 22]

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv. \quad (1.188)$$

Формула (1.188) имеет место не только если u и v независимые переменные (в этом случае можно считать du и dv стремящимися к нулю приращениями аргументов u и v), но и тогда, когда они — произвольные функции класса C^1 . Если, например, $u = u(t)$ и $v = v(t)$, то в (1.188)

$$du = \dot{u} dt, \quad dv = \dot{v} dt.$$

В случае функции трех переменных приняты аналогичные записи. Если, например, $F = F(x; y; z)$, то

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial F}{\partial z}.$$

На основании сказанного выше будем пользоваться обозначениями

$$F_x(M_0) = F_x(x_0, y_0, z_0), \quad F_y(M_0) = F_y(x_0, y_0, z_0), \quad (1.189) \\ F_z(M_0) = F_z(x_0, y_0, z_0).$$

1.3.2. Поверхности

1. Способы задания поверхностей. Пусть в области $\mathcal{D}$ плоскости (Oxy) задана функция

$$z = f(x, y), \quad (1.190)$$

класса $C^k(\mathcal{D})$, где $k \in \{1; 2\}$.

Множество всех точек $(x; y; f(x; y))$, таких, что $(x; y) \in \mathcal{D}$, называется простым куском поверхности, принадлежащим классу C^k . Соотношение (1.190) именуют уравнением данного простого куска поверхности; говорят, что он является графиком функции (1.190).

Для выполнения многих теоретических и прикладных исследований понятие простого куска поверхности недостаточно общее. Рассмотрим, например, сферу с центром в начале координат и радиусом длины r . Она описывается, как известно, уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \quad (1.191)$$

Простым куском поверхности сфера не будет, ибо ее невозможно задать уравнением вида (1.190) (каждое из равенств $z = \pm \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ и $z = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, вытекающих из (1.191), описывает лишь полусферу).

Нужной степенью общности обладают следующие определения.

Неявно е задание поверхности. Пусть в области $\mathcal{D} \subset R^3$ задана функция $F(x, y, z)$ класса $C^k(\mathcal{D})$, где $k \in \{1; 2\}$. Множество всех точек $(x; y; z)$, координаты которых удовлетворяют равенству

$$F(x; y; z) = 0, \quad (1.192)$$

(точнее — совокупность всех точек $(x_0; y_0; z_0) \in \mathcal{D}$, таких, что упорядоченная тройка чисел $(x_0; y_0; z_0)$ является решением уравнения (1.192)), называется поверхностью, заданной в неявном виде, а соотношение (1.192) уравнением этой поверхности.

Ниже будет показано, что сформулированное определение нуждается в уточнениях. Они заключаются в подчинении функции F дополнительным условиям, которые приводятся в п. 5.

Запись $S: F(x, y, z) = 0; F \in C^k$ означает в дальнейшем, что через S обозначена поверхность, описываемая уравнением (1.192).

К виду (1.192) приводимо уравнение любого простого куска поверхности; для этого достаточно перейти от (1.190) к

$$f(x; y) - z = 0.$$

Параметрическое задание поверхности. Пусть в области $\mathcal{D}$ плоскости (O^*uv) заданы функции $x(u; v)$, $y(u; v)$ и $z(u; v)$ класса $C^k(\mathcal{D})$, где $k \in \{1; 2\}$. Каждой упорядоченной паре $(u_0; v_0)$ соответствует определенная точка $(x(u_0; v_0); y(u_0; v_0); z(u_0; v_0))$ координатного пространства R^3 . Предположим, что текущая точка $(u; v)$ пробегает область $\mathcal{D}$; множество всех точек $(x(u; v); y(u; v); z(u; v))$, таких, что $(u; v) \in \mathcal{D}$, называется поверхностью, заданной в параметрическом виде. Систему равенств

Если $u, v \in C'$, то из системы (1.201) можно исключить t^{17} . Это приводит к равенству типа

$$f(u, v) = 0. \quad (1.202)$$

Поэтому любая линия L , лежащая на поверхности S , описывается функцией (1.199), где, однако, u и v не изменяются независимо друг от друга, как в случае уравнения поверхности, а связаны соотношением типа (1.202). Отсюда следует, что кривая L задается системой

$$\vec{r} = \vec{r}(u; v), \quad (u; v) \in \mathcal{D} \quad (1.203)$$

$$f(u; v) = 0, \quad (1.204)$$

где $\mathcal{D}$ — область плоскости (u, v) . В тех случаях, когда это не может стать источником неясности, пользуются сокращенными формулировками « $f(u, v) = 0$ является внутренним уравнением линии L , расположенной на поверхности S » или «кривая L определяется равенством $f(u, v) = 0$ ». Если оно разрешимо относительно одной из переменных, то внутреннее уравнение линии L представимо в форме $u = f(v)$ или $v = g(u)$, вместо чего пишут также $u = u(v)$ или $v = v(u)$.

Заменив в системе (1.203)...(1.204) соотношение (1.204) на

$$f(u, v; c) = 0, \quad (1.205)$$

где c не зависит ни от u , ни от v . Пусть параметр пробегает числовой промежуток I (см. п. 1.1), а функция f непрерывна для всех $(u; v) \in \mathcal{D}$ и $c \in I$. При $c = c_0 = \text{const} \in I$ равенство (1.205) превратится в $f(u; v; c_0) = 0$ — внутреннее уравнение определенной линии L_{c_0} , лежащей на поверхности S : $\vec{r} = \vec{r}(u; v)$, $(u, v) \in \mathcal{D}$. Таким образом, каждому $c \in I$ соответствует, и притом единственная, кривая L_c , расположенная на поверхности S . Множество $\{L_c\}$ всех линий L_c называется однопараметрическим семейством кривых, лежащих на S , а c именуют параметром этого семейства. Можно доказать следующее: если функция f удовлетворяет некоторым дополнительным условиям (достаточно потребовать, например, существование непрерывной частной производной f_c , не обращающейся в нуль ни для какой упорядоченной тройки (u_0, v_0, c_0) , где $(u_0, v_0) \in \mathcal{D}$ и $(c_0 \in I)$, то существует такой кусок S^* поверхности S , что через каждую его точку проходит, и притом единственная, линия совокупности $\{L_c\}$. В этом случае семейство кривых $\{L_c\}$ называют правильным. Оно покрывает непрерывно и однозначно регулярный кусок S^* поверхности S .

¹⁷ Предполагаем, что читатель знаком по крайней мере в нестрогой форме с понятием исключения переменной из системы уравнений. Пусть $u = \cos t$ и $v = \sin t$. Исключение параметра t из этой системы приводит к соотношению $u^2 + v^2 = 1$.

Аналогично определяется задаваемое уравнением $f(u, v; c_1, c_2) = 0$ двупараметрическое множество гладких линий, расположенных на поверхности S .

В системе (1.203)...(1.204) заменим равенство (1.204) дифференциальным уравнением первого порядка

$$\frac{du}{dv} = g(u, v). \quad (1.206)$$

где $g \in C^1(\mathcal{D})$. Оно равносильно, согласно теории обыкновенных дифференциальных уравнений [7, 10, 13, 16, 19, 20], соотношению (1.206). Отсюда следует, что (1.206) определяет однопараметрическое семейство кривых, лежащих на поверхности S . Будем называть равенство (1.206) внутренним дифференциальным уравнением этой совокупности линий. Можно доказать, что она правильная.

В дальнейшем встретится система типа (1.203)...(1.204), содержащая вместо (1.204) обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, в котором u — функция переменной v или наоборот. Оно приводимо всегда к одной из следующих форм:

$$f\left(u, v, \frac{dv}{du}, \frac{d^2v}{du^2}\right) = 0, \quad (1.207)$$

$$f\left(v, u, \frac{du}{dv}, \frac{d^2u}{dv^2}\right) = 0, \quad (1.208)$$

$$f(u, v, du, dv, d^2u, d^2v) = 0, \quad (1.209)$$

где f — функция класса C ; очевидно, что (1.209) охватывает (1.208) и (1.207) как частные случаи. Тогда рассматриваемая система примет вид

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}(u, v) \\ f(u; v; du, dv, d^2u, d^2v) = 0. \end{cases} \quad (1.210)$$

$$f(u; v; du, dv, d^2u, d^2v) = 0. \quad (1.211)$$

Дифференциальное уравнение (1.209) равносильно соотношению

$$F(u, v; C_1, C_2) = 0$$

(C_1 и C_2 — произвольные постоянные; $F \in C$), не содержащему ни производных, ни дифференциалов и получаемому путем решения (интегрирования) этого дифференциального уравнения [7, 10, 13, 16, 19, 20]. Поэтому система (1.210)...(1.211) эквивалентна

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}(u, v), \\ F(u, v, C_1, C_2) = 0, \end{cases} \quad (1.212)$$

$$F(u, v, C_1, C_2) = 0, \quad (1.213)$$

которая описывает зависящее от двух параметров (C_1 и C_2) семейство линий, расположенных на поверхности S .

Если

$$x=x(t), y=y(t), z=z(t), \quad (1.214)$$

— параметрические уравнения линии класса $C^2(I)$, лежащей на поверхности

$$S: F(x, y, z), F \in C^2(R^3),$$

то соотношение

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0, \quad (1.215)$$

выполняется тождественно для всех $t \in I$.

Исследование кривых несложно. Поэтому поверхности изучают путем рассматривания лежащих на них линий. В этом состоит один из основных методов теории поверхностей. Отсюда видна также роль, которую играют кривые, расположенные на поверхностях.

3. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная точка поверхности

$$S: F(x, y, z) = 0, \quad (1.216)$$

где

$$F(x, y, z) \in C^1(R^3). \quad (1.217)$$

Рассмотрим множество всех расположенных на ней гладких кривых, проходящих через M_0 . Они допускают натуральную параметризацию (п. 1.2.14). Поэтому уравнения любой из них представимы в виде

$$x=x(s), y=y(s), z=z(s), \quad (1.218)$$

причем

$$x(s), y(s), z(s) \in C^1(I), \quad (1.219)$$

а через I обозначен промежуток, пробегаемый криволинейной абсциссой s . В силу (1.216), (1.218) и сказанного в п. 1.3.2.2.

$$F(x(s), y(s), z(s)) = 0, s \in I. \quad (1.220)$$

Из (1.217) и (1.219) следует, что дифференцирование обеих частей (1.220) допустимо. Оно приводит к тождеству

$$\frac{d}{ds} F(x(s), y(s), z(s)) = 0, \quad (1.221)$$

имеющему место при каждом $s \in I$. На основании (1.221) и теоремы о производной сложной функции

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{ds} = 0$$

или, что то же,

$$F_x x'(s) + F_y y'(s) + F_z z'(s) = 0, s \in I, \quad (1.222)$$

где

$$F_x \equiv F_x(x(s), y(s), z(s)) = \left. \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} \right|_{x=x(s), y=y(s), z=z(s)}, \quad (1.223)$$

смысл входящих в (1.222) выражений F_y и F_z аналогичен.

Если s_0 — значение параметра s , соответствующее точке M_0 кривой (1.218), то

$$x(s_0) = x_0, y(s_0) = y_0, z(s_0) = z_0. \quad (1.224)$$

В силу (1.223) и (1.224)

$$\begin{aligned} F_x|_{s=s_0} &= F_x(x(s_0); y(s_0); z(s_0)) = F_x(x_0, y_0, z_0); \\ F_y|_{s=s_0} &= F_y(x_0, y_0, z_0), F_z|_{s=s_0} = F_z(x_0, y_0, z_0). \end{aligned} \quad (1.225)$$

Из (1.224) и (1.225) следует, что при $s=s_0$ равенство (1.222) примет вид

$$\begin{aligned} F_x(x_0, y_0, z_0) x'(s_0) + F_y(x_0, y_0, z_0) y'(s_0) + \\ + F_z(x_0, y_0, z_0) z'(s_0) = 0 \end{aligned} \quad (1.226)$$

или в более короткой записи

$$F_x(M_0) x'(s_0) + F_y(M_0) y'(s_0) + F_z(M_0) z'(s_0) = 0 \quad (1.227)$$

(на основании (1.230)).

Преобразуем левую часть равенства (1.227) к более простому виду. В силу (1.163)

$$\vec{r}(s_0) = x'(s_0) \vec{i} + y'(s_0) \vec{j} + z'(s_0) \vec{k}. \quad (1.228)$$

Введем вектор с координатами $\{F_x(M_0), F_y(M_0), F_z(M_0)\}$. Он определен в любой точке поверхности S (это вытекает из (1.217)) и называется градиентом функции F (или поверхности S) в точке M_0 и обозначается через $\text{grad } F(M_0)$:

$$\text{grad } F(M_0) = F_x(M_0) \vec{i} + F_y(M_0) \vec{j} + F_z(M_0) \vec{k}. \quad (1.229)$$

Вместо grad пишут также ∇ . Левую часть (1.229) читают «градиент функции F в точке M_0 », знак ∇ — «набла», а выражение $\nabla F(M_0)$ — «набла эф от M_0 ». Из (1.14), (1.228) и (1.229) следует, что

$$\vec{r}(s_0) \text{ grad } F(M_0) = F_x(M_0) x'(s_0) + F_y(M_0) y'(s_0) + F_z(M_0) z'(s_0). \quad (1.230)$$

На основании (1.227) и (1.230)

$$\vec{r}(s_0) \text{ grad } F(M_0) = 0, \quad (1.231)$$

откуда в силу (1.11)

$$\vec{\tau}(s_0) \perp \text{grad } F(M_0). \quad (1.232)$$

Обозначим буквой L проходящую через M_0 кривую, для которой $\vec{\tau}(s_0)$ — единичный вектор касательной в точке M_0 . Тогда, согласно введенной в п. 2.15 символике, формула (1.232) примет вид

$$\vec{\tau}(L; s_0) \perp \text{grad } F(M_0). \quad (1.233)$$

Перейдем к геометрическому истолкованию соотношения (1.233). Из (1.229) видно, что вектор $\text{grad } F(M_0)$ зависит только от функции F и от упорядоченной тройки чисел (x_0, y_0, z_0) , т. е. от поверхности S и ее точки M_0 . Он определен, и притом однозначно, если они заданы. Вывод соотношения (1.233) показывает, что оно выполняется для любой проходящей через M_0 кривой L , расположенной на поверхности S . Это значит, что касательные, проведенные в точке M_0 ко всем проходящим через нее линиям, лежащим на поверхности S , перпендикулярны вектору $\text{grad } F(M_0)$. Отсюда следует, что все эти прямые принадлежат плоскости, проведенной через M_0 ортогонально вектору $\text{grad } F(M_0)$. Она называется касательной плоскостью поверхности S в точке M_0 . Прямую, проходящую через M_0 и перпендикулярную указанной касательной плоскости, именуют нормалью к данной поверхности в точке M_0 .

Обозначим единичный вектор этой нормали через $\vec{\nu}$ и положим

$$\vec{\nu} = \frac{\text{grad } F(M_0)}{|\text{grad } F(M_0)|}. \quad (1.234)$$

Вместо $\vec{\nu}$ будем писать $\vec{\nu}(S; M)$ в тех случаях, когда необходимо указать, что $\vec{\nu}$ — единичный вектор нормали к поверхности S в точке M .

4. Регулярные и особые точки гладкой поверхности. Пусть

$$F_x(M_0) = F_y(M_0) = F_z(M_0) = 0. \quad (1.235)$$

Тогда в силу (1.229) $\text{grad } F(M_0) = 0$, поэтому направление нормали (а значит, и пространственная ориентация касательной плоскости) к поверхности S в точке M_0 становится неопределенным. Отсюда следует, что в точке, в которой все частные производные первого порядка функции F обращаются в нуль или, что то же, $\text{grad } F(M_0) = 0$, поверхность $F=0$ не имеет ни касательной плоскости, ни нормали (точнее, в этом случае проведенные в точке M_0 касательные к кривым, проходящим через M_0 и расположенным на поверхности S , не лежат в одной плоскости). Если $\text{grad } F(M_0) = 0$, то M_0 называется особой, сингулярной или нерегулярной точкой поверхности $F=0$; применяется и термин « M_0 является особенностью (сингулярно-

стью) данной поверхности». Простейшим примером особой точки служит вершина конуса. Предположим, что наоборот, $\text{grad } F(M_0) \neq 0$, т. е. в точке M_0 хотя бы одна из частных производных F_x , F_y и F_z отлична от нуля; тогда M_0 именуют регулярной или неособой точкой. Кусок поверхности, все точки которого неособые, называется регулярным. Всюду в дальнейшем, рассматривая поверхность или ее простой кусок, будем предполагать, что они регулярны.

Выведем необходимые и достаточные условия регулярности для поверхности, заданной параметрически.

Пусть функции

$$u = u(t), \quad v = v(t); \quad u, v \in C^1(I), \quad (1.236)$$

описывают лежащую на поверхности

$$S: \vec{r} = \vec{r}(u; v), \quad \vec{r}(u; v) \in C^2(R^2) \quad (1.237)$$

и проходящую через ее фиксированную точку M_0 линию L (п. 1.3.2.2). Обозначим множество всех таких кривых через $\{L\}$. Как показано в п. 1.3.2.2, векторным уравнением линии L служат

$$\vec{r} = \vec{r}(u(t); v(t)). \quad (1.238)$$

Для краткости записей вместо $\vec{r}(u(t); v(t))$ запишем $\vec{r}(t)$. Из (1.236) ... (1.238) и теоремы о дифференцируемости сложной функции следует, что $\vec{r}(t) \in C^1(I)$, значит, кривая L имеет всюду касательную (п. 2.13). Если t_0 — значение параметра t , соответствующее точке M_0 , то, согласно сказанному в п. 1.2.13, вектором

касательной к линии L в точке M_0 является $\left. \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right|_{t=t_0}$. На основании (1.238) и теоремы о производной сложной функции

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt} = \dot{u}(t) \vec{r}_u + \dot{v}(t) \vec{r}_v, \quad t \in I \quad (1.239)$$

(использованы введенные в п. 1.3.1.3 обозначения частных производных), где под $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ подразумеваются функции переменной t , заданные формулами

$$\vec{r}_u = \left. \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial u} \right|_{u=u(t), v=v(t)}, \quad (1.240)$$

$$\vec{r}_v = \left. \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial v} \right|_{u=u(t), v=v(t)}. \quad (1.241)$$

При $t = t_0$ соотношение (1.239) принимает вид

$$\left. \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = \dot{u}(t_0) \vec{r}_u(M_0) + \dot{v}(t_0) \vec{r}_v(M_0) \quad (1.242)$$

(см. п. 1.3.1.3). В равенстве (1.242) $\vec{r}_u(M_0)$ и $\vec{r}_v(M_0)$ зависят только от поверхности S и ее точки M_0 , а $\dot{u}(t_0)$ и $\dot{v}(t_0)$ — от кривой L . Заменим L любой другой линией

$$L^*: u = u^*(t), v = v^*(t)$$

семейства $\{L\}$; тогда правая часть (1.242) обретет форму

$$\dot{u}^*(t_0) \vec{r}_u(M_0) + \dot{v}^*(t_0) \vec{r}_v(M_0).$$

Таким образом, при переходе от одной кривой множества $\{L\}$ к другой в (1.242) изменяется только $\dot{u}(t)$ и $\dot{v}(t)$, а $\vec{r}_u(M_0)$ и $\vec{r}_v(M_0)$ останутся неизменными. Отсюда следует, что для каждой линии семейства $\{L\}$ вектор ее касательной в точке M_0 имеет вид

$$A\vec{r}_u(M_0) + B\vec{r}_v(M_0), \quad (1.243)$$

где $A, B \in \mathbb{R}$. Пусть

$$\vec{r}_u(M_0) \neq \vec{0}, \vec{r}_v(M_0) \neq \vec{0}, \quad (1.244)$$

$$\vec{r}_u(M_0) \nparallel \vec{r}_v(M_0), \quad (1.245)$$

т. е. $\vec{r}_u(M_0)$ и $\vec{r}_v(M_0)$ неколлинеарны и ни один из них не равен $\vec{0}$. Тогда существует, и притом единственная, проходящая через M_0 плоскость, компланарная векторам $\vec{r}_u(M_0)$ и $\vec{r}_v(M_0)$. Обозначим ее через

$$(M_0; \vec{r}_u(M_0), \vec{r}_v(M_0)); \quad (1.246)$$

в тех случаях, когда это не может вызвать неясность, вместо (1.246) будем писать $(M_0; \vec{r}_u, \vec{r}_v)$. Для любых $A, B \in \mathbb{R}$ исходящий из M_0 вектор (1.243) лежит в плоскости $(M_0; \vec{r}_u, \vec{r}_v)$. Поэтому в ней расположены касательные в точке M_0 ко всем кривым множества $\{L\}$. Отсюда вытекает на основании сформулированного в п. 1.3.2.3 определения, что $(M_0; \vec{r}_u, \vec{r}_v)$ является касательной плоскостью поверхности S в точке M_0 .

Рассмотрим векторное произведение $\vec{r}_u(M_0) \times \vec{r}_v(M_0)$. Оно зависит, очевидно, от функции $\vec{r}(u; v)$ (т. е. от S) и точки M_0 . Положим

$$\vec{N}(S; M_0) = \vec{r}_u(M_0) \times \vec{r}_v(M_0); \quad (1.247)$$

вместо $\vec{N}(S; M_0)$ будем писать также $\vec{N}(M_0)$ или $\vec{N}$. В силу (1.244), (1.245) и (1.247)

$$\vec{N} \neq \vec{0}.$$

Согласно определению векторного произведения (см. п. 1.1.4)

$$\vec{N} \perp (M_0; \vec{r}_u(M_0), \vec{r}_v(M_0)), \quad (1.248)$$

т. е. $\vec{N}(S, M_0)$ служит вектором нормали к поверхности S в точке M_0 . Им задается, и притом единственным образом, пространственная ориентация плоскости $(M_0; \vec{r}_u; \vec{r}_v)$.

Кроме того,

$$\nu(S; M_0) = \frac{\vec{N}(S; M_0)}{|\vec{N}(S; M_0)|} \quad (1.249)$$

Из вышензложенного следует, что в том, и только том случае, когда выполнены условия (1.244) и (1.245), или, что то же, при

$$\vec{r}_u(M_0) \times \vec{r}_v(M_0) \neq \vec{0}, \quad (1.250)$$

поверхность S имеет однозначно определенные нормаль и касательную плоскость в точке M_0 , т. е. M_0 является регулярной точкой поверхности S . В силу (1.194), (1.184)

$$\vec{r}_u(M_0) \times \vec{r}_v(M_0) \begin{vmatrix} \vec{i}, & \vec{j}, & \vec{k}, \\ x_u(M_0), & y_u(M_0), & z_u(M_0) \\ x_v(M_0), & y_v(M_0), & z_v(M_0) \end{vmatrix} \quad (1.251)$$

На основании (1.251) неравенство (1.250) равносильно

$$\begin{vmatrix} \vec{i}, & \vec{j}, & \vec{k} \\ x_u(M_0), & y_u(M_0), & z_u(M_0) \\ x_v(M_0), & y_v(M_0), & z_v(M_0) \end{vmatrix} \neq \vec{0}, \quad (1.252)$$

которое выполняется тогда и только тогда, когда хотя бы один из миноров второго порядка матрицы

$$\begin{vmatrix} x_u(M_0), & y_u(M_0), & z_u(M_0) \\ x_v(M_0), & y_v(M_0), & z_v(M_0) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля (см. п. 1.1.4). Тем самым установлен необходимый и достаточный признак регулярности. Он гласит: точка M , лежащая на поверхности S , заданной уравнениями

$$\begin{aligned} x &= x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \\ (u, v) &\in D^*, \end{aligned} \quad (1.253)$$

регулярна в том и только в том случае, когда по крайней мере один из миноров второго порядка матрицы

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (1.254)$$

отличен от нуля в точке M .

В п. 1.3.2.1 было показано, что описываемое уравнениями (1.253) множество точек может представлять собой линию. Если сформулированный выше критерий выполняется для всех $(u, v) \in \mathcal{D}$, то поверхность S не вырождается в кривую, т. е. данное множество не будет линией.

Для правильного применения и более глубокого понимания выведенного признака регулярности должно быть принято во внимание следующее. Классический способ аналитического описания поверхности основан на использовании функций

$$x(u; v); \quad y(u; v); \quad z(u; v), \quad (1.255)$$

посредством которых она параметризована. Отсюда вытекает, что если в некоторой точке M_0 все три матрицы второго порядка матрицы (1.254) равны нулю, то это может быть обусловлено либо строением данной поверхности в точке M_0 и ее окрестности, либо не геометрией поверхности, а свойствами функций (1.255), т. е. выбранным способом параметризации. Следующие примеры подтверждают это.

Пример 1. Пусть вершиной конуса S служит начало отсчета системы $Oxyz$, осью симметрии — прямая (Oz) , а величина угла при вершине осевого сечения равна $\frac{\pi}{4}$. Обозначим полярные координаты в плоскости (xOy) через u и v (u — длина полярного радиуса). Тогда, если $(x; y; z)$ — произвольная точка конической поверхности, то

$$\begin{aligned} x &= u \cos v, \\ y &= u \sin v, \\ z &= u, \end{aligned} \quad (1.256)$$

где

$$\begin{aligned} u &\geq 0, \\ 0 &\leq v < 2\pi. \end{aligned}$$

Система уравнений (1.3.73) представляет собой параметризацию данного конуса. Из (1.256) видно, что он является (включая

вершину) поверхностью класса C^2 . В вершине $u=0$, а величина v полярного угла не определена. В силу (1.256)

$$x_u = \cos v, \quad y_u = \sin v, \quad z_u = 1; \quad (1.257)$$

$$x_v = -u \sin v, \quad y_v = u \cos v, \quad z_v = 0.$$

Из (1.257) следует, что для рассматриваемого конуса матрица (1.254) равна

$$\begin{vmatrix} \cos v & \sin v & 1 \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{vmatrix}$$

При $u=0$, т. е. применительно к его вершине, она обретает форму

$$\begin{vmatrix} \cos v & \sin v & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (1.258)$$

Каково бы ни было v , все три минора второго порядка матрицы (1.258) обращаются в нуль. Это согласуется с чисто геометрическим отличием вершины конуса от любой другой его точки. Он имеет однозначно определенные касательную плоскость и нормаль в каждой точке, исключая вершину.

Пример 2. Пусть центр сферы S — начало отсчета O , а длина ее радиуса равна R . Обозначим географические широту и долготу текущей точки $(x; y; z)$ поверхности S через u и v соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} x &= R \cos u \cos v, \\ y &= R \cos u \sin v, \\ z &= R \sin u, \end{aligned} \quad (1.259)$$

где

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} &\leq u \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 &\leq v < 2\pi. \end{aligned}$$

Тем самым задана параметризация сферы. В силу (1.259) $S \in C^2$, причем

$$\begin{aligned} x_u &= -R \sin u \cos v, \quad x_v = -R \cos u \sin v; \\ y_u &= -R \sin u \sin v, \quad y_v = -R \cos u \cos v; \\ z_u &= R \cos u, \quad z_v = 0. \end{aligned} \quad (1.260)$$

Из (1.260) следует, что в данном случае матрицей (1.254) будет

$$\begin{vmatrix} -R \sin u \cos v & -R \sin u \sin v & R \cos u \\ -R \cos u \sin v & R \cos u \cos v & 0 \end{vmatrix}$$

При $u = \frac{\pi}{2}$ она обретает вид

$$\begin{vmatrix} -R \cos v & -R \sin v & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (1.261)$$

Все три минора второго порядка этой матрицы равны нулю, т. е. в точке, однозначно определяемой условием $u = \frac{\pi}{2}$ («северный полюс сферы») признак регулярности не выполняется. Это относится и к случаю $u = -\frac{\pi}{2}$ («южный полюс»). Тем не менее нет никаких геометрических различий между строением сферической поверхности в полюсах и в других ее точках. Она имеет однозначно определенные нормаль и касательную плоскость в любой точке M (ими служат соответственно прямая (OM) и перпендикулярная к ней плоскость, проходящая через M). Поэтому обращение в нуль всех трех миноров второго порядка матрицы (1.261) вызвано не геометрическими свойствами сферы, а свойствами функций, используемых для ее параметризации (т. е. стоящих в правых частях равенств (1.259)). В точках $u = -\frac{\pi}{2}$

и $u = \frac{\pi}{2}$ налицо, следовательно, особенность не сферы, а ее параметризации (1.259). При переходе к другой параметризации эта сингулярность исчезает. Действительно, рассматриваемая поверхность может быть задана также посредством уравнений

$$\begin{aligned} x &= R \cos(u + \alpha) \cos v, \\ y &= R \cos(u + \alpha) \sin v, \\ z &= R \sin(u + \alpha), \end{aligned} \quad (1.262)$$

где α — произвольная действительная постоянная. Предположим, что $\alpha \neq 0$, ибо лишь тогда (1.262) отличается от (1.259). Применительно к параметризации (1.262) матрицей (1.253) будет в общем случае

$$\begin{vmatrix} -R \sin(u + \alpha) \cos v & -R \sin(u + \alpha) \sin v & R \cos(u + \alpha) \\ -R \cos(u + \alpha) \sin v & R \cos(u + \alpha) \cos v & 0 \end{vmatrix}$$

а при

$$\begin{vmatrix} -R \cos \alpha \cos v & -R \cos \alpha \sin v & -R \sin \alpha \\ R \sin \alpha \sin v & -R \sin \alpha \cos v & 0 \end{vmatrix} \quad (1.263)$$

Определитель, образуемый первыми двумя столбцами матрицы (1.263), равен $\frac{1}{2} R^2 \sin 2\alpha$. Он отличен от нуля (каким бы ни было значение параметра u) для всех $\alpha \neq \frac{1}{2} m\pi$, где m — любое целое число.

Из предыдущего вытекает, что результат исследования поверхности с помощью ее аналитического описания уравнениями

вида (1.252) содержит как сведения о самой поверхности, так и соотношения, относящиеся лишь к используемой параметризации и не доставляющие какой-либо информации о свойствах данной поверхности. Необходимо, следовательно, дополнительное рассмотрение любого результата, полученного посредством параметризации, с целью установить, представляет ли он собой в действительности сведение о геометрии данной поверхности.

5. **Криволинейные координаты на поверхности.** Пусть $u_0, v_0, U, V = \text{const} \in R$, причем $u_0 < U$ и $v_0 < V$, а (u, v) — текущая точка плоскости (u, v) . Система неравенств

$$\begin{cases} u_0 \leq u \leq U, \\ v_0 \leq v \leq V \end{cases} \quad (1.264)$$

определяет прямоугольную область $\mathcal{D}$ в этой координатной плоскости. Обозначим через $\vec{r}(u; v)$ заданную в $\mathcal{D}$ векторную функцию класса $C^2(\mathcal{D})$ (будем считать $\vec{r}$ исходящим из начала отсчета O радиус-вектором) и рассмотрим поверхность

$$S: \vec{r} = \vec{r}(u; v), \quad (u; v) \in \mathcal{D}. \quad (1.265)$$

Предположим, что она регулярна всюду в $\mathcal{D}$.

В уравнении (1.265) зафиксируем переменную u , полагая

$$u = u^* = \text{const} \in [u_0; U]. \quad (1.266)$$

Тогда

$$\vec{r} = \vec{r}(u^*, v), \quad (1.267)$$

где v пробегает отрезок $[v_0, V]$. Из сказанного в п. 1.3.2.3 следует, что (1.267) — параметрическое векторное уравнение линии класса C^2 , лежащей на поверхности S (u служит параметром). Каждому $u = \text{const} \in [u_0; U]$ соответствует, и притом единственная, такая кривая. Она однозначно определяется равенством (1.266), если поверхность S задана соотношением (1.265) и называется координатной (или параметрической) линией на поверхности S . Будем именовать кривую (1.267) координатной линией $u = u^*$. Обозначим через U семейство всех таких кривых.

Аналогично этому символ V означает в дальнейшем совокупность всех координатных линий $v = v^*$ ($v^* = \text{const} \in [v_0; V]$), т. е. кривых, определяемых, если поверхность S задана посредством уравнения (1.265), соотношением

$$v = v^*,$$

и описываемых, следовательно, векторным равенством

$$\vec{r} = \vec{r}(u; v^*),$$

где параметром служит u .

Можно доказать (ввиду недостатка места здесь не будет излагаться доказательство), что: 1° — каждая линия семейства (U) пересекает, и притом в точности один раз, любую из кривых множества (V) ; 2° — если в точке M поверхности S выполняются условия регулярности, то через M проходит единственная координатная кривая каждого семейства.

Ввиду этого свойства параметрических линий множество, содержащее все кривые каждого из семейств (U) и (V) , было названо сетью (системой) координатных линий или криволинейной координатной сетью на поверхности S , а переменные u и v — гауссовыми (по имени ученого, введшего их впервые) или криволинейными координатами на данной поверхности. Если M' — пересечение линий $u=u^*$ и $v=v^*$, то будем говорить, что u^* и v^* — криволинейные координаты точки M^* , писать $M^*(u^*; v^*)$ или короче $(u^*; v^*)$, и называть ее точкой $(u^*; v^*)$ поверхности S . Не следует смешивать ее с точкой $(u^*; v^*)$ координатной плоскости $(u\Omega v)$.

Сформулированное выше свойство 2° выражают коротко следующим образом: сеть координатных линий покрывает поверхность (точнее — всю ее регулярную часть).

Пусть любые две принадлежащие разным семействам координатные линии сети пересекаются под прямым углом (т. е. в их точке пересечения проведенные к ним касательные взаимно перпендикулярны). В этом случае она называется ортогональной.

В п. 1.3.2.1 показано, что каждая поверхность допускает бесконечное множество параметризаций. Отсюда следует, что на одной и той же регулярной поверхности гауссовы координаты могут быть введены бесконечно многими способами.

Криволинейные координаты служат только для задания положения точки на поверхности и геометрического смысла, как правило, не имеют.

Результаты исследования поверхности, выполненного с помощью гауссовых координат, представляют собой информацию о свойствах как самой поверхности, так и примененной сети параметрических линий. Это делает необходимым анализ данных результатов с целью выявления содержащихся в них сведений, относящихся к геометрии изучаемой поверхности и не зависящих от использованной системы координатных кривых.

6. Первая квадратичная форма поверхности. Пусть

$$u=u(t), v=v(t); u, v \in C^1(I) \quad (1.268)$$

— уравнения гладкой кривой L , лежащей на регулярной поверхности

$$S: \vec{r} = \vec{r}(u; v); \quad \vec{r}(u; v) \in C^1(R^2), \quad (1.269)$$

где

$$\vec{r} = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}, \quad (1.270)$$

откуда

$$\vec{r}_u = x_u\vec{i} + y_u\vec{j} + z_u\vec{k}, \quad (1.271)$$

$$\vec{r}_v = x_v\vec{i} + y_v\vec{j} + z_v\vec{k}. \quad (1.272)$$

Векторным уравнением линии L будет

$$\vec{r} = \vec{r}(u(t); v(t)). \quad (1.273)$$

Правая часть равенства (1.273) дифференцируема всюду в I , причем на основании (1.188) и сказанного в п. 1.3.1.3 о полном дифференциале вектор-функция

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv. \quad (1.274)$$

В силу того что $L \in C^1$, кривая L спрямляема (см. п. 1.2.3, 1.2.4 и 1.2.14). Обозначим дифференциал длины ее дуги через ds (п. 1.2.14). Из (1.159) и (1.274) следует, что

$$ds^2 = (d\vec{r})^2 = (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)^2 = \vec{r}_u^2 du^2 + 2\vec{r}_u \vec{r}_v dudv + \vec{r}_v^2 dv^2. \quad (1.275)$$

На основании (1.271), (1.272), (1.232) и (1.230)

$$\vec{r}_u^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \quad (1.276)$$

$$\vec{r}_u \vec{r}_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \quad (1.277)$$

$$\vec{r}_v^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2. \quad (1.278)$$

Введем обозначения

$$E(u; v) = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \quad (1.279)$$

$$F(u; v) = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \quad (1.280)$$

$$G(u, v) = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2; \quad (1.281)$$

в тех случаях, когда это не может вызвать неясность, вместо $E(u, v)$, $F(u, v)$ и $G(u, v)$ будем писать E , F и G . Если M_0 — точка поверхности S , имеющая криволинейные координаты (u_0, v_0) , где $u_0, v_0 = \text{const} \in R$, то под $E(M_0)$, $F(M_0)$ и $G(M_0)$ подразумеваются значения функций E , F и G при $u = u_0$ и $v = v_0$. Из (1.275) ... (1.281) следует, что

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2. \quad (1.282)$$

Выражение

$$E(u, v) du^2 + 2F(u, v) dudv + G(u, v) dv^2, \quad (1.283)$$

где E , F и G задаются равенствами (1.279)...(1.281), именуют первой основной квадратичной¹⁶ формой поверхности, описываемой уравнениями

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v);$$

функции E , F и G называются коэффициентами первой квадратичной формы.

Формулы (1.275)...(1.282) показывают, что для любой гладкой поверхности первая квадратичная форма неотрицательна и обращается в нуль и только тогда, когда $\vec{r}=\text{const}$ (т. е. поверхность S вырождается в точку) или $u, v=\text{const}$ (линия L сводится к точке). Из (1.279) и (1.281) видно также, что если $\vec{r} \neq \text{const}$, то $E > 0$ и $G > 0$. Коэффициент F может принимать любые действительные значения. Пусть $F(M_0)=0$; тогда в силу (1.282) и (1.277)

$$\vec{r}_u(M_0) \cdot \vec{r}_v(M_0) = 0, \quad (1.284)$$

следовательно (см. (1.229)),

$$\vec{r}_u(M_0) \perp \vec{r}_v(M_0), \quad (1.285)$$

т. е. координатные линии поверхности S , проходящие через точку M_0 , взаимно ортогональны. Отсюда вытекает, что если $F(u, v)=0$ для всех упорядоченных пар (u, v) , то любые две координатные линии поверхности S , принадлежащие разным семействам введенной на S сети, пересекаются под прямым углом, т. е. рассматриваемая координатная сеть ортогональна. Истинно и обратное утверждение.

Для вычисления длины произвольной дуги линии L примем во внимание, что

$$du = \dot{u}(t)dt, \quad dv = \dot{v}(t)dt. \quad (1.286)$$

В силу (1.282) и (1.286)

$$ds^2 = (E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2)dt^2. \quad (1.287)$$

Из неотрицательности первой квадратичной формы следует, что

$$E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2 \geq 0 \quad (1.288)$$

во всех точках поверхности S . На основании (1.287) и (1.288)

$$ds = \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} dt \quad (1.289)$$

¹⁶ Квадратичной формой, зависящей от переменных x и y , называют в алгебре многочлен вида $ax^2 + bxy + cy^2$, где $a, b, c = \text{const}$. По отношению к du и dv , принятым в качестве переменных, (1.283) является квадратичной формой (1.279)...(1.281).

Важную роль в теории поверхностей играет еще одна квадратичная форма, называемая второй. Ее определение не приводится здесь, так как в дальнейшем она не применяется.

(знак правой части выбран исходя из того, что $\dot{s} > 0$; см. (1.155)). Пусть M_1 и M_2 — точки линии L , соответствующие значениям t_1 и t_2 параметра t . Тогда в силу (1.289)

$$|\widetilde{M_1 M_2}|_L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} dt, \quad (1.290)$$

где

$$E = E(u(t), v(t)), \quad F = F(u(t), v(t)),$$

$$G = G(u(t), v(t)), \quad \dot{u} = \dot{u}(t), \quad \dot{v} = \dot{v}(t),$$

т. е. подкоренное выражение — заданная функция переменной t .

Выведем еще одну формулу для вычисления $|\widetilde{M_1 M_2}|$; она используется в том случае, когда линия L задана в виде

$$v = v(u), \quad v \in C^1, \quad (1.291)$$

или, что то же, в более подробной форме

$$u = u, \quad v = v(u). \quad (1.292)$$

Сопоставление соотношений (1.268) и (1.292) показывает, что при таком способе кривой L роль переменной t играет параметр u . Поэтому для нахождения $|\widetilde{M_1 M_2}|$ в (1.290) следует заменить $t, \dot{u}, \dot{v}, t_1$ и t_2 соответственно через $u, 1, v' = \frac{dv}{du}, u_1, u_2$. Выполнив эту замену, получим

$$|\widetilde{M_1 M_2}| = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{E + 2F \frac{dv}{du} + G \left(\frac{dv}{du} \right)^2} du. \quad (1.293)$$

7. Взаимно ортогональные линии на поверхности. Пусть на регулярной поверхности

$$S: \vec{r} = \vec{r}(u, v), \quad \vec{r}(u, v) \in C^1(R^2) \quad (1.294)$$

расположены линии¹⁹

$$L_1: u = u_1(t_1), \quad v = v_1(t_1); \quad u_1, v_1 \in C^1 \quad (1.295)$$

и

$$L_2: u = u_2(t_2), \quad v = v_2(t_2); \quad u_2, v_2 \in C^1. \quad (1.296)$$

Их векторными уравнениями будут

$$L_1: \vec{r} = \vec{r}(u_1(t_1), v_1(t_1)). \quad (1.297)$$

и

$$L_2: \vec{r} = \vec{r}(u_2(t_2), v_2(t_2)). \quad (1.298)$$

¹⁹ В (1.295) и (1.296) параметры обозначены через t_1 и t_2 , так как в общем случае разные кривые, лежащие на одной и той же поверхности, описываются аналитически посредством разных параметров.

Для краткости записей введем обозначения

$$\vec{r}_1(t_1) = \vec{r}(u_1(t_1), v_1(t_1)), \quad (1.299)$$

$$\vec{r}_2(t_2) = \vec{r}(u_2(t_2), v_2(t_2)). \quad (1.300)$$

Тогда (1.297) и (1.298) примут вид $L_1: \vec{r} = \vec{r}_1(t_1)$ и $L_2: \vec{r} = \vec{r}_2(t_2)$.

Ввиду гладкости кривых L_1 и L_2 каждая имеет в любой из своих точек касательную. Векторами этих касательных будут $\vec{dr}_1$ и $\vec{dr}_2$. В силу (1.299) и (1.300)

$$\vec{dr}_1 = \vec{r}_u du_1 + \vec{r}_v dv_1, \quad (1.301)$$

$$\vec{dr}_2 = \vec{r}_u du_2 + \vec{r}_v dv_2. \quad (1.302)$$

В формуле (1.301)

$$\vec{r}_u = \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right|_{u=u_1(t_1), v=v_1(t_1)}, \quad (1.303)$$

$$\vec{r}_v = \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|_{u=u_1(t_1), v=v_1(t_1)}, \quad (1.304)$$

а в (1.302)

$$\vec{r}_u = \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right|_{u=u_2(t_2), v=v_2(t_2)}, \quad (1.305)$$

$$\vec{r}_v = \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|_{u=u_2(t_2), v=v_2(t_2)}. \quad (1.306)$$

Допустим, что линии L_1 и L_2 пересекаются в точке M_0 , и рассмотрим векторы $\vec{dr}_1(M_0)$ и $\vec{dr}_2(M_0)$ касательных к L_1 и L_2 в этой точке. Из (1.301) и (1.302) следует, что

$$\vec{dr}_1(M_0) = \vec{r}_u(M_0) du_1 + \vec{r}_v(M_0) dv_1, \quad (1.307)$$

$$\vec{dr}_2(M_0) = \vec{r}_u(M_0) du_2 + \vec{r}_v(M_0) dv_2. \quad (1.308)$$

Если

$$\vec{dr}_1(M_0) \perp \vec{dr}_2(M_0), \quad (1.309)$$

то говорят, что кривые L_1 и L_2 взаимно ортогональны (или пересекаются под прямым углом) в точке M_0 . Соотношение (1.309) равносильно

$$\vec{dr}_1(M_0) \cdot \vec{dr}_2(M_0) = 0. \quad (1.310)$$

На основании (1.307), (1.308) и (1.276)...(1.281)

$$\begin{aligned} \vec{dr}_1(M_0) \cdot \vec{dr}_2(M_0) &= (\vec{r}_u(M_0) du_1 + \vec{r}_v(M_0) dv_1) \times \\ &\times (\vec{r}_u(M_0) du_2 + \vec{r}_v(M_0) dv_2) = \vec{r}_u^2(M_0) du_1 du_2 + \\ &+ \vec{r}_u(M_0) \vec{r}_v(M_0) (du_1 dv_2 + dv_1 du_2) + \vec{r}_v^2(M_0) dv_1 dv_2 = \\ &= E(M_0) du_1 du_2 + F(M_0) (du_1 dv_2 + dv_1 du_2) + G(M_0) dv_1 dv_2. \end{aligned} \quad (1.311)$$

В силу (1.310) и (1.311) линии L_1 и L_2 взаимно ортогональны тогда и только тогда, когда

$$E(M_0) du_1 du_2 + F(M_0) (du_1 dv_2 + dv_1 du_2) + G(M_0) dv_1 dv_2 = 0. \quad (1.312)$$

Равенство (1.312) представимо также в виде

$$E(du)_1 (du)_2 + F((du)_1 (dv)_2 + (du)_2 (dv)_1) + G(dv)_1 (dv)_2 = 0, \quad (1.313)$$

где $(du)_1$, $(dv)_1$ и $(du)_2$, $(dv)_2$ — отнесенные к линиям L_1 и L_2 дифференциалы переменных u и v , а E , F и G — значения коэффициентов первой квадратичной формы поверхности S в ее текущей точке $(u; v)$.

Будем пользоваться и следующей записью соотношения (1.313):

$$E \left(\frac{du}{dv} \right)_1 \left(\frac{du}{dv} \right)_2 + F \left[\left(\frac{du}{dv} \right)_1 + \left(\frac{du}{dv} \right)_2 \right] + G = 0. \quad (1.314)$$

Выполнение равенства (1.314) необходимо и достаточно для взаимной ортогональности кривых L_1 и L_2 (они входят в условие (1.314) (посредством производных $\left(\frac{du}{dv} \right)_1$ и $\left(\frac{du}{dv} \right)_2$), лежащих на поверхности S .

8. Ортогональные траектории. Пусть на регулярной поверхности $S: \vec{r} = \vec{r}(u; v)$ расположено однопараметрическое семейство $\{L\}$ линий класса C^1 . Покажем, что существует зависящая от одного параметра совокупность гладких кривых, лежащих на поверхности S , каждая из которых ортогональна всем пересекаемым ею линиям множества $\{L\}$.

Как установлено в п. 1.3.2.7, семейство $\{L\}$ определяется, и притом однозначно, своим внутренним дифференциальным уравнением. Будем считать его заданным в виде $\frac{du}{dv} = f(u; v)$. Оно выполняется для каждой кривой совокупности $\{L\}$. Примем в условии (1.314) в качестве L_1 произвольную кривую множества $\{L\}$, а в качестве L_2 — любую лежащую на поверхности S линию, ортогональную кривой L_1 . Тогда в (1.314) $\left(\frac{du}{dv} \right)_1 = f(u, v)$, индекс

2 может быть опущен, ввиду одной производной в полученном соотношении. Это приводит к равенству

$$E(u; v)f(u; v)\frac{du}{dv} + F(u; v)\left(\frac{du}{dv} + f(u; v) + G(u; v)\right) = 0, \quad (1.315)$$

являющемуся дифференциальным уравнением типа (1.206). Оно определяет, как показано в п. 1.3.2.2, некоторое однопараметрическое семейство гладких линий (обозначим его через $\{L_+\}$), лежащих на поверхности S . Каждая из них ортогональна всем пересекаемым ею кривым, принадлежащим множеству $\{L\}$.

Линии семейства $\{L_+\}$ называются ортогональными траекториями кривых множества $\{L\}$, которые, в свою очередь, являются ортогональными траекториями линий совокупности $\{L_+\}$.

1.4. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ

1. Постановка вопроса. Пусть на регулярной поверхности S лежит гладкая линия L . Обозначим единичные векторы нормали к S и главной нормали к L в текущей точке $M \in L$ через $\vec{\nu}(S; M)$ и $\vec{n}(L; M)$. В силу (1.247) и (1.249)

$$\vec{\nu}(S; M) = \frac{\vec{r}_u(M) \times \vec{r}_v(M)}{|\vec{r}_u(M) \times \vec{r}_v(M)|}. \quad (1.316)$$

Будем считать, что орты $\vec{\nu}(S; M)$ и $\vec{n}(L; M)$ исходят из M ; к уменьшению общности результатов это предположение не приведет.

В общем случае $\vec{n}(L; M) \neq \vec{\nu}(S; M)$, т. е. если на поверхности S расположена построенная произвольным образом кривая класса C^2 , то ее главная нормаль не совпадает, как правило, с проведенной в этой же точке нормалью к S . Вместе с тем если M_0 — любая фиксированная точка поверхности S , то существует бесконечное множество лежащих на ней и проходящих через M_0 гладких линий таких, что главной нормалью каждой из них в точке M является нормаль к S , проведенная в данной точке.

Действительно, проведем через $\vec{\nu}(S; M_0)$ произвольную неподвижную плоскость A_0 ; она пересекает поверхность S по кривой, которую обозначим через L_0 . Пусть $\vec{\tau}(L_0; M_0)$ — исходящий из M_0 единичный вектор касательной к L_0 в точке M_0 . Согласно сказанному в п. 1.3.2.3 о нормали к любой регулярной поверхности

$$\vec{\nu}(S; M_0) \perp \vec{\tau}(L_0; M_0). \quad (1.317)$$

По построению L_0 и $\vec{\nu}(S; M_0)$ лежат в одной плоскости; поэтому из (1.317) следует, что $\vec{\nu}(S; M_0) = \vec{n}(L_0; M_0)$, т. е. нормаль к S в точке M_0 является главной нормалью к линии L_0 в рассматриваемой точке.

Кривых, обладающих этим свойством, т. е. удовлетворяющих условию (1.317), существует бесконечно много, ибо плоскость A может быть проведена через $\vec{\nu}(S; M_0)$ произвольным образом. В любой отличной от M_0 точке M каждой из них соотношение

$$\vec{n}(L_0; M) = \vec{\nu}(S; M), \quad (1.318)$$

как правило, не будет выполняться.

Изложенное выше приводит к следующему вопросу. Дана регулярная поверхность S . Существует ли расположенная на ней гладкая линия L , обладающая тем свойством, что в любой ее точке главная нормаль совпадает с проведенной к поверхности S в этой точке нормалью? Иными словами, можно ли построить кривую L_0 класса C^2 , лежащую на регулярной поверхности S и удовлетворяющую условию (1.318) для всех $M \in L$. Эта проблема рассматривается ниже.

2. Геодезические линии. Ответ на поставленный вопрос утвердителен. Из любой точки $M_0 \in S$ исходят бесконечно много расположенных на поверхности S гладких линий, для каждой из которых соотношение (1.318) выполняется во всех ее точках. Чтобы убедиться в истинности этого утверждения, продолжим начатый в п. 1.4.1 анализ, сохраняя введенные там обозначения.

При сколь угодно малом, заранее заданном положительном ϵ существует точка M_1 кривой L_0 , удовлетворяющая условиям

$$|\vec{M_0M_1}| \leq \epsilon, \quad (1.319)$$

$$0 < (\vec{\tau}(L_0; M_1), \vec{M_0M_1}) < \frac{\pi}{2}. \quad (1.320)$$

Они означают соответственно, что 1) M_1 — близкая к M_0 точка линии L_0 (ибо длина дуги $[\vec{M_0M_1}]$ не превосходит ϵ); 2) хорда $[\vec{M_0M_1}]$ образует острый угол с вектором $\vec{\tau}(L_0; M_1)$, т. е. M_1 лежит по ту сторону от M_0 , которая соответствует возрастанию отсчитываемой от M_0 вдоль L_0 криволинейной абсциссы (см. п. 1.2.14). Очевидно, что существует бесконечное множество точек, удовлетворяющих условиям 1) и 2); одну из них зафиксируем и обозначим ее через M_1 .

Пусть $\vec{\tau}(L_0; M_1)$ и $\vec{\nu}(S; M_1)$ — исходящие из M_1 орты касательной к L_0 и нормали к S соответственно. Рассмотрим проходящую через них плоскость. Она пересекает поверхность S по некоторой гладкой линии L_1^* , разбиваемой точкой M_1 на две части²⁰. Одна из них (обозначим ее через L_1) расположена по ту же сторону от проведенной в точке M_1 нормальной плоскости кривой L_1^* что и вектор $\vec{\tau}(L_0; M_1)$. Это равносильно тому, что на L_1 направление возрастания отсчитываемой от M_1 криволинейной абсциссы задается ортом $\vec{\tau}(L_0; M_1)$. Отсюда следует

$$\vec{\tau}(L_1; M_1) = \vec{\tau}(L_0; M_1),$$

т. е. L_0 и L_1 имеют общую касательную в точке M_1 , значит, дуга $[M_0M_1]$ переходит гладко в линию L_1 . Ввиду этого

$$[M_0M_1] \cup L_1 \in C^1,$$

(об использовании знака $\cup$ — см. п. 1.1), т. е. кривая, состоящая из $[M_0M_1]$ и L_1 , является линией класса C^1 . На основании определения нормали к поверхности

$$\vec{\nu}(S; M_1) \perp \vec{\tau}(L_1; M_1) \quad (1.321)$$

По построению, L_1 и $\vec{\nu}(S; M)$ лежит в одной плоскости; поэтому, в силу (1.321), $\vec{\nu}(S; M_1)$ — единичный вектор главной нормали кривой L_1 в точке M_1 , т. е.

$$\vec{n}(L_1; M_1) = \vec{\nu}(S; M_1).$$

Пусть далее $M_2 \in L_1$, причем

$$0 < (\vec{\tau}(L_1; M_2); \vec{M}_1\vec{M}_2) < \frac{\pi}{2},$$

т. е. точка M_2 получена из M_1 таким же способом, как и M_1 из M_0 . Через M_2 компланарно касательной $\vec{\tau}(L_1; M_2)$ и нормали $\vec{\nu}(S; M_2)$ проведем плоскость и рассмотрим линию L_2^* ее пересечения с поверхностью S . Ту часть кривой L_2^* , которая исхо-

²⁰ Плоские кривые L_0 и L^* не расположены в одной плоскости (и, следовательно, не совпадают), так как линия L_1^* лежит, по построению, в плоскости, проходящей не через $\vec{\tau}(L_0; M_1)$ и нормаль $\vec{n}(L_0; M_1)$ к кривой L_0 в точке M_1 , а через $\vec{\tau}(L_0; M_1)$ и нормаль $\vec{\nu}(S; M_1)$ к поверхности S (в общем случае $\vec{\nu}(S; M) \neq \vec{n}(L_0; M)$).

дит из M_2 в направлении орта $\vec{\tau}(L_2; M_2)$, обозначим через L_2 . Тогда

$$\vec{\tau}(L_2; M_2) = \vec{\tau}(L_1; M_2),$$

значит, дуга $[M_1M_2]$ переходит гладко в линию L_2 , т. е. кривая, состоящая из $[M_0M_1]$, $[M_1M_2]$ и L_2 , принадлежит классу C^1 :

$$[M_0M_1] \cup [M_1M_2] \cup L_2 \in C^1.$$

На основании свойства нормали к поверхности

$$\vec{\nu}(S; M_2) \perp \vec{\tau}(L_2; M_2),$$

следовательно, $\vec{\nu}(S; M_2)$ — единичный вектор главной нормали к линии L_2 в точке M_2 :

$$\vec{n}(L_2; M_2) = \vec{\nu}(S; M_2).$$

Выполнив описанное выше построение p раз ($p = \text{const} \in N$), получим конечную последовательность расположенных на поверхности S дуг

$$[M_0M_1]; [M_1M_2]; \dots; [M_{p-1}M_p]. \quad (1.322)$$

Длина каждой не превосходит ϵ :

$$|M_{k-1}M_k| \leq \epsilon \text{ для всех } k \in \{1; \dots; p\} \quad (1.323)$$

Конец любой из них (кроме последней) служит началом следующей. Поэтому их объединение

$$[M_0M_1] \cup [M_1M_2] \cup \dots \cup [M_{p-1}M_p] = \bigcup_{k=1}^p [M_{k-1}M_k]$$

— непрерывная кривая; обозначим ее через L_ϵ . Легко видеть, что $L_\epsilon \in C^1$. Действительно, дуги (1.322) принадлежат линиям, полученным путем пересечения поверхности S плоскостями, а любое плоское сечение регулярной поверхности — гладкая кривая, следовательно,

$$[M_{k-1}M_k] \in C^1 \text{ для всех } k \in \{1; \dots; p\}. \quad (1.324)$$

По способу построения линии L_ϵ она имеет касательную в каждой из точек $M_1, M_2, \dots, M_p$. Отсюда и из (1.324) вытекает, что $L_\epsilon \in C^1$. Из построения кривой L_ϵ следует также, что

$$\vec{n}(L_\epsilon; M_k) = \vec{\nu}(S; M_k) \text{ для всех } k \in \{0; 1; 2; \dots; p-1\}, \quad (1.325)$$

т. е. в точках $M_0, M_1, \dots, M_{p-1}$ главная нормаль дуги M_k совпадает с нормалью к поверхности S в этих точках. Пусть $[AB]$ —

произвольная, сколь угодно малая дуга кривой L_ε . Число лежащих на $[AB]$ точек, в которых выполняется условие (1.325), будет как угодно большим при достаточно малом ε . Устремим ε к нулю. Относительно поведения линии L_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ можно доказать следующее (ввиду его сложности доказательство не может быть приведено здесь). Пусть p неограниченно возрастает и притом так, что ε стремится к нулю, а длина дуги $[M_0 M_p]$ остается конечной. Тогда кривая L_ε стремится к совпадению с лежащей на поверхности S гладкой линией L , в каждой точке M которой имеет место соотношение

$$\vec{n}(L; M) = \vec{\nu}(S; M). \quad (1.326)$$

Кривая L однозначно определяется заданием точки M_0 и плоскости A_0 (см. п. 1.4.1). Иными словами, одновременное стремление ε к нулю и p к бесконечности (при этом длина дуги $[M_0 M_p]$ должна оставаться конечной) влечет за собой неограниченное приближение линии L_ε к кривой L класса C^1 , удовлетворяющей условию (1.326).

Тем самым установлено, что на любой регулярной поверхности существуют гладкие линии, обладающие следующим свойством: в любой точке такой кривой ее главная нормаль совпадает с проведенной в этой точке нормалью к данной поверхности. Кривую, которой присуще это свойство, именуют геодезической линией поверхности. Наряду с названием «геодезическая линия» применяется слово «геодезическая». Ради краткости, вместо выражения «дуга геодезической линии, соединяющая точки A и B » будем пользоваться термином «геодезическая дуга $[AB]$ » и обозначать ее длину через $\|AB\|$.

Полученная выше кривая L — геодезическая линия регулярной поверхности S исходит из произвольной точки $M_0 \in S$. В соответствии с выполненным построением

$$\vec{\tau}(L; M_0) = \vec{\tau}(L_\varepsilon; M_0), \quad (1.327)$$

т. е. касательные к L и L_ε в точке M_0 совпадают. Поэтому направление, в котором кривая L проходит через M_0 , задается вектором $\vec{\tau}(L_\varepsilon; M_0)$. По построению $\vec{\tau}(L_\varepsilon; M_0)$ совпадает с ортом $\vec{\tau}(L_0; M_0)$ касательной к линии L_0 , представляющей собой сечение поверхности S произвольной плоскостью A , проведенной через нормаль $\vec{\nu}(S; M_0)$ к S в точке M_0 . Вследствие этого $\vec{\tau}(L_\varepsilon; M_0)$ может быть каким угодно исходящим из M_0 единичным вектором, лежащим в плоскости, касающейся поверхности

S в точке M_0 . Отсюда и из (1.327) вытекает, что через каждую точку регулярной поверхности S в любом, заранее заданном направлении, компланарном касательной плоскости к S в данной точке, проходит, и притом единственная, геодезическая линия этой поверхности. Полученный вывод допускает следующую формулировку. Проходящая через M_0 геодезическая $\vec{r} = \vec{r}(t)$ поверхности S однозначно определена в том случае, когда известны (кроме уравнения поверхности) значения $\vec{r}$ и $\dot{\vec{r}}$ в точке M_0 .

При этом вектор $\dot{\vec{r}}(M_0)$ не может быть произвольным: он должен удовлетворять требованию компланарности касательной плоскости, проведенной к данной поверхности в точке M_0 .

Возникает вопрос: будет ли однозначно определенной геодезическая линия $\vec{r} = \vec{r}(t)$, если задание функции $\vec{r}$ и производной $\dot{\vec{r}}$ в одной и той же точке заменить другими условиями? Ответ дается следующим утверждением, известным под названием теоремы Дарбу. Пусть M_1 — произвольная фиксированная точка регулярной поверхности S . Тогда можно выделить кусок $S^* \subset S$, содержащий M_1 и обладающий следующим свойством: если M_2 — любая отличная от M_1 точка куска S^* , то существует, и притом единственная, целиком расположенная на нем геодезическая дуга поверхности S , соединяющая M_1 и M_2 . Доказательство не может быть приведено здесь ввиду его сложности.

Очевидно, что кусок S^* может быть выбран многими способами.

Из сказанного выше следует, что условия $\vec{r}(M_0) = \vec{r}_0$, $\dot{\vec{r}}(M_0) = \dot{\vec{r}}_0$ ($\vec{r}_0$ и $\dot{\vec{r}}_0$ — известные постоянные векторы), определяющие однозначно геодезическую линию, можно заменить заданием координат или радиус-векторов двух лежащих на данной поверхности точек, через которые должна проходить геодезическая.

3. Необходимое и достаточное условие геодезичности. Пусть M — текущая точка произвольной гладкой кривой L , расположенной на регулярной поверхности S , а $\vec{\tau} = \vec{\tau}(L; M)$, $\vec{n} = \vec{n}(L; M)$ и $\vec{\nu} = \vec{\nu}(S; M)$ означают то же, что и выше. Рассмотрим смешанное произведение $\vec{\tau} \vec{n} \vec{\nu}$ (см. п. 1.4.4.).

Если L — геодезическая линия поверхности S , то $\vec{n}(L; M) = \vec{\nu}(S; M)$ для всех $M \in L$, откуда $\vec{\tau} \vec{n} \vec{\nu} = 0$. Пусть наоборот, $\vec{\tau} \vec{n} \vec{\nu} = 0$. Тогда по крайней мере два из векторов $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ и $\vec{\nu}$ кол-

линейны. По определению нормали к поверхности и главной нормали кривой, $\vec{n} \perp \vec{\tau}$ и $\vec{v} \perp \vec{\tau}$, т. е. коллинеарными не будут ни $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$, ни $\vec{v}$ и $\vec{\tau}$, значит $\vec{n} \parallel \vec{v}$ в любой точке $M \in S$, т. е. L — геодезическая линия поверхности S .

Из предыдущего следует, что гладкая линия L , лежащая на регулярной поверхности S , будет геодезической в том и только том случае, когда

$$\vec{\tau}(L; M) \vec{n}(L; M) \vec{v}(S; M) = 0 \quad (1.328)$$

для всех $M \in L$.

4. Дифференциальное уравнение геодезических линий. Если регулярная поверхность S задана уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}(u; v), \quad (1.329)$$

то условие (1.328) позволяет получить полное аналитическое описание множества всех ее геодезических. Ниже показывается, что соотношение (1.328) равносильно дифференциальному уравнению типа (1.209), которое вместе с (1.329) образует систему вида (1.210)...(1.211), определяющую, как показано в п. 1.4.3, двухпараметрическое семейство кривых, лежащих на поверхности S . Каждая из них будет геодезической линией, ибо для нее выполнено равенство (1.328), которому удовлетворяют все геодезические кривые поверхности S , и только они.

Обозначим через $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Под s и r будем подразумевать соответственно криволинейную абсциссу и радиус-вектор текущей точки M выбранной произвольным образом геодезической линии L поверхности S .

Кривая L представима тогда либо в форме $\vec{r} = \vec{r}(s)$, либо посредством функции (1.329), где u и v не независимы, а связаны соотношением типа (1.329) или (1.207). При этом $\vec{r}(s)$ и $\vec{r}(u; v)$ означают радиус-вектор одной и той же точки $M \in L$. Поэтому наличие производных $\vec{r}'(s)$, $\vec{r}''(s)$, $\vec{r}_u(u, v)$ и $\vec{r}_v(u, v)$ в одном аналитическом выражении не приведет к неясности.

В силу (1.160), (1.166) и (1.316) уравнение (1.328) равносильно каждому из следующих

$$\left(\vec{r}', \frac{1}{\rho} \vec{r}'', \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} \right) = 0, \quad \frac{1}{\rho |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} \left(\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \vec{r}_u \times \vec{r}_v \right) = 0, \quad (1.330)$$

$$(d\vec{r}, d^2\vec{r}, \vec{r}_u \times \vec{r}_v) = 0.$$

Из определения смешанного произведения (п. 1.4.4) следует, что (1.330) представимо в форме

$$(d\vec{r} \times d^2\vec{r}) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) = 0. \quad (1.331)$$

На основании сказанного в п. 1.4.4 условие (1.331) эквивалентно пропорции

$$\vec{r}_u d\vec{r} : \vec{r}_v d\vec{r} = \vec{r}_u d^2\vec{r} : \vec{r}_v d^2\vec{r}. \quad (1.332)$$

Положим для упрощения записей

$$\mathcal{A} = \vec{r}_u d\vec{r}, \quad \mathcal{B} = \vec{r}_v d\vec{r}, \quad (1.333)$$

$$\mathcal{C} = \vec{r}_u d^2\vec{r}, \quad \mathcal{D} = \vec{r}_v d^2\vec{r}. \quad (1.334)$$

Тогда (1.332) представимо в виде ²¹

$$\mathcal{A} : \mathcal{B} = \mathcal{C} : \mathcal{D} \quad (1.335)$$

или, что то же,

$$\begin{vmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{C} \\ \mathcal{B} & \mathcal{D} \end{vmatrix} = 0. \quad (1.336)$$

Приведение условия (1.336) к окончательной форме заключается в выражении его левой части через E, F, G (они являются функциями переменных u и v ; см. п. 1.3.2.6), du и dv . Полученное соотношение будет искомым дифференциальным уравнением типа (1.209), описывающим совокупность всех геодезических кривых поверхности (1.229). Для его вывода исходим из того, что в силу (1.333), (1.188) и (1.276)...(1.278)

$$\mathcal{A} = \vec{r}_u^2 du + \vec{r}_u \vec{r}_v dv = E du + F dv, \quad (1.337)$$

$$\mathcal{B} = \vec{r}_u \vec{r}_v du + \vec{r}_v^2 dv = F du + G dv. \quad (1.338)$$

В правые части равенств (1.334) входит второй дифференциал $d^2\vec{r}$. Его вычисление основано на том, что вследствие сказанного в п. 1.3.1 полный дифференциал векторной функции двух переменных дается формулой (1.188). Такой функцией является и $d\vec{r}$ ²². Поэтому $d^2\vec{r}$ выражается путем замены в (1.188) $\vec{r}$ на $d\vec{r}$:

²¹ В (1.332) сокращение на $d\vec{r}$ или $d^2\vec{r}$ невозможно, так как если $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ — произвольные векторы, то в общем случае $\vec{a} \cdot \vec{b} : \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} : \vec{c}$, ибо отношение $\vec{b} : \vec{c}$ имеет смысл лишь при $\vec{b} \parallel \vec{c}$.

²² Согласно определению, $d^2f = d(df)$ и $dx^2 = (dx)^2$, где x — переменная, а f — числовая или векторная функция любого числа аргументов ($i \in C^2$).

$$d^2\vec{r} = d(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) = d\vec{r}_u du + \vec{r}_u d^2u + d\vec{r}_v dv + \vec{r}_v d^2v. \quad (1.339)$$

Дифференциалы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ также вычисляются с помощью правила (1.188) (его применимость следует из того, что $\vec{r}_u, \vec{r}_v \in C^1$), значит,

$$d\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}_u}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{r}_u}{\partial v} dv = \vec{r}_{uu} du + \vec{r}_{uv} dv, \quad (1.340)$$

$$d\vec{r}_v = \vec{r}_{uv} du + \vec{r}_{vv} dv. \quad (1.341)$$

На основании (1.339)...(1.341)

$$d^2\vec{r} = \vec{r}_{uu} du^2 + 2\vec{r}_{uv} dudv + \vec{r}_{vv} dv^2 + \vec{r}_u d^2u + \vec{r}_v d^2v. \quad (1.342)$$

В силу (1.334), (1.342) и (1.276)...(1.278)

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \vec{r}_u \vec{r}_{uu} du^2 + 2\vec{r}_u \vec{r}_{uv} dudv + \vec{r}_u \vec{r}_{vv} dv^2 + \vec{r}_u^2 d^2u + \vec{r}_u \vec{r}_v d^2v = \\ &= Ed^2u + Fd^2v + \vec{r}_u \vec{r}_{uu} du^2 + 2\vec{r}_u \vec{r}_{uv} dudv + \vec{r}_u \vec{r}_{vv} dv^2, \end{aligned} \quad (1.343)$$

$$\mathcal{D} = Fd^2u + Gd^2v + \vec{r}_v \vec{r}_{uu} du^2 + 2\vec{r}_v \vec{r}_{uv} dudv + \vec{r}_v \vec{r}_{vv} dv^2. \quad (1.344)$$

Входящие в (1.343) и (1.344) скалярные произведения выражаются через E , F и G посредством дифференцирования обеих частей (1.276)...(1.278) по u и v (его допустимость — следствие того, что $\vec{r} \in C^2$). Оно приводит к равенствам

$$\vec{r}_u \vec{r}_{uu} = \frac{1}{2} E_u, \quad (1.345)$$

$$\vec{r}_u \vec{r}_{vv} = \frac{1}{2} E_v, \quad (1.346)$$

$$\vec{r}_{uu} \vec{r}_v + \vec{r}_u \vec{r}_{uv} = F_u, \quad (1.347)$$

$$\vec{r}_{uv} \vec{r}_v + \vec{r}_u \vec{r}_{vv} = F_v, \quad (1.348)$$

$$\vec{r}_v \vec{r}_{uv} = \frac{1}{2} G_u, \quad (1.349)$$

$$\vec{r}_v \vec{r}_{vv} = \frac{1}{2} G_v. \quad (1.350)$$

Из (1.346)...(1.349) вытекают соотношения

$$\vec{r}_u \vec{r}_{vv} = F_v - \frac{1}{2} G_u, \quad (1.351)$$

$$\vec{r}_v \vec{r}_{uu} = F_u - \frac{1}{2} E_v. \quad (1.352)$$

На основании (1.343)...(1.346) и (1.349)...(1.352)

$$\mathcal{C} = Ed^2u + Fd^2v + \frac{1}{2} E_u du^2 + E_v dudv + \left(F_v - \frac{1}{2} G_u\right) dv^2, \quad (1.353)$$

$$\mathcal{D} = Fd^2u + Gd^2v + \left(F_u - \frac{1}{2} E_v\right) du^2 + Gdudv + \frac{1}{2} G_v dv^2. \quad (1.354)$$

Из доказанного выше следует, что множество всех геодезических линий поверхности S описывается системой, состоящей из (1.328) и (1.332), где $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ даются формулами (1.337), (1.338), (1.353) и (1.354). В (1.353) и (1.354) входят d^2u и d^2v , значит, порядок дифференциального уравнения (1.332) равен двум, вследствие чего семейство всех геодезических кривых любой регулярной поверхности зависит от двух параметров (см. п. 1.3.1).

Примером, иллюстрирующим методику составления уравнения (1.332), может служить рассмотренное в п. 1.5.4 нахождение множества геодезических линий цилиндрической поверхности.

5. Полугеодезические координатные сети. Пусть S — регулярная поверхность. Как показано в п. 1.4.4, множество всех ее геодезических линий представляет собой двупараметрическое семейство кривых; обозначим его через (G) . Зафиксируем одну (любую) из параметров, придав ему произвольное допустимое числовое значение. Тем самым из (G) выделена покрывающая поверхность S правильная совокупность линий, зависящая от одного параметра; обозначим ее через (U) . Она обладает, согласно сказанному в п. 1.3.2.8, множеством ортогональных траекторий; введем для него обозначение (V) . Оно также однопараметрично. Кривые, входящие в семейства (U) и (V) , могут быть приняты в качестве координатных линий на поверхности S ; образуемая ими сеть ортогональна. Она называется полу-геодезической системой криволинейных координат и может быть введена, как следует из сказанного выше, на любой регулярной поверхности. Одна совокупность координатных кривых полу-геодезической сети состоит из геодезических линий данной поверхности, образующих однопараметрическое семейство, другие — из ортогональных траекторий этих геодезических.

Из предыдущего вытекает, что если S — произвольная регулярная поверхность, то существует бесконечно много покрывающих ее полугеодезических координатных сетей.

Утверждение «регулярная поверхность отнесена к полугеодезическим координатам» означает, что введенная на ней координатная сеть $(u; v)$, через переменные которой выражаются коэффициенты первой основной квадратичной формы данной поверхности, полугеодезична.

6. Первая основная квадратичная форма в случае полугеодезических координат. Найдем первую основную квадратичную форму регулярной поверхности S , отнесенной к полугеодезической сети $(u; v)$. Пусть ds — дифференциал длины дуги произвольной, расположенной на S гладкой линии. Тогда (см. 1.3.2.6)

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad (1.355)$$

где E , F и G даются формулами (1.276)...(1.278). Ввиду ортогональности любой системы полугеодезических координат и на основании доказанного в п. 1.3.2.6 $F=0$, следовательно,

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2. \quad (1.356)$$

Предположим, что каждая кривая семейства (U) (см. п. 1.4.5) отнесена к натуральному параметру (см. п. 1.2.4; это всегда выполнимо и не ведет к уменьшению общности результатов). Тогда применительно к любой линии L множества (U) под u подразумевается, с точностью до знака, длина ее дуги, отсчитываемая от пересечения кривой L с фиксированной линией (ее уравнением будет $v=0$) семейства (V) . Знак натурального параметра u в точке $M(u; v)$ определяется тем, по какую сторону от кривой $v=0$ она расположена. Из сказанного выше следует, что линия L описывается уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u; v)$, где u переменна, а v фиксировано. Пусть $\vec{\tau}(L; M)$ — единичный вектор касательной к L в точке M . В силу установленного в п. 1.2.15 и вследствие того, что u — натуральный параметр, будем иметь

$$\vec{r}_u(M) = \vec{\tau}(L; M), \quad (1.357)$$

для всех $M \in S$; в (1.357) под L подразумевается кривая семейства (U) , проходящая через M . Из (1.276), (1.162) и (1.357) вытекает, что

$$E = \vec{r}_u^2(M) = \vec{\tau}^2(L; M) = 1. \quad (1.358)$$

На основании (1.356) и (1.358)

$$ds^2 = du^2 + Gdv^2. \quad (1.359)$$

Формула (1.359) выражает первую основную квадратичную форму регулярной поверхности, отнесенной к полугеодезической сети. Введение полугеодезических координат приводит, следовательно, к значительному упрощению формулы для дифференциала длины дуги гладкой кривой, расположенной на поверхности.

7. Геодезические дуги как кратчайшие расстояния на поверхностях (свойство минимальности длин геодезических криволинейных отрезков). Из всех расположенных на регулярной поверхности дуг, соединяющих две ее фиксированные точки, наименьшей длиной обладает геодезическая дуга (это утверждение истинно при выполнении сформулированного ниже дополнительного условия). Применительно к поверхностям геодезические линии играют, следовательно, ту роль, которая на плоскости свойственна прямым.

Пусть S — регулярная поверхность, а M_1 и M_2 — ее произвольные точки. В силу теоремы Дарбу (п. 1.4.2) существует, и притом единственная, проходящая через них геодезическая. Обозначим ее через $(M_1 M_2)^*$, ее криволинейный отрезок с концами M_1 и M_2 — через $[\overline{M_1 M_2}]^{*23}$ и пусть $\|\overline{M_1 M_2}\|$ — длина дуги $[\overline{M_1 M_2}]$, а M — множество всех лежащих на поверхности S гладких негеодезических дуг $[\overline{M_1 M_2}]$, достаточно близких к $[\overline{M_1 M_2}]^*$. Тогда

$$\|\overline{M_1 M_2}\| < \|\overline{M_1 M_2}\| \text{ для всех } [\overline{M_1 M_2}] \in M. \quad (1.360)$$

Упомянутое выше дополнительное условие заключается в том, что все входящие в совокупность M криволинейные отрезки

должны быть расположены достаточно близко в дуге $[\overline{M_1 M_2}]^*$.

Убедимся в справедливости неравенства (1.360). Согласно сказанному в п. 1.4, множество всех геодезических линий поверхности S представляет собой объединение двух однопараметрических семейств; одному из них принадлежит геодезическая $(M_1 M_2)^*$. Обозначим его через (U) и отнесем поверхность S к полугеодезической системе криволинейных координат (u, v) , состоящей из геодезических линий множества (U) и семейства (V) их ортогональных траекторий. Тогда M_1 и M_2 будут лежать на одной кривой множества (U) ; ее уравнение имеет вид (см. п. 1.3.2.5)

$$v = v_0,$$

где $v_0 = \text{const} \in R$. Координаты точек M_1 и M_2 представимы вследствие этого в форме $(u_1; v_0)$ и $(u_2; v_0)$. Предположим, что $u_2 > u_1$; это допущение не уменьшит общности результатов. Из него следует, что

$$u_1 \leq u \leq u_2 \text{ на дуге } [\overline{M_1 M_2}]^*. \quad (1.361)$$

Вычислим $\|\overline{M_1 M_2}\|$. В каждой точке $M(u; v)$ линии $(M_1 M_2)^*$ имеет место равенство $v = v_0 = \text{const}$, значит,

²³ Если геодезическая $(M_1 M_2)^*$ замкнута (как, например, большие круги сферы), то M_1 и M_2 разбивают ее на две дуги. В этом случае под $[\overline{M_1 M_2}]^*$ будем подразумевать одну из них, произвольно выбранную.

$$dv=0 \text{ на кривой } (M_1 M_2)^*. \quad (1.362)$$

Если ds — дифференциал длины дуги $[M_1 M_2]$, то в силу (1.359) $ds^2 = du^2$, значит,

$$ds = du \text{ на } [\widetilde{M_1 M_2}]^*, \quad (1.363)$$

откуда вследствие (1.361)

$$\|\widetilde{M_1 M_2}\| = \int_{[\widetilde{M_1 M_2}]^*} ds = \int_{u_1}^{u_2} du = u_2 - u_1. \quad (1.364)$$

Пусть теперь $[\widetilde{M_1 M_2}]$ — произвольная дуга семейства M . Не уменьшая общности результатов, можно считать ее внутреннее уравнение (см. п. 1.3.2.2) заданным в форме

$$v = v(u), \quad v(u) \in C^1[u_1; u_2],$$

откуда

$$dv = v'(u) du. \quad (1.365)$$

Если ds — дифференциал длины криволинейного отрезка $[\widetilde{M_1 M_2}]$, то на основании (1.362) и (1.365)

$$ds^2 = [1 + Gv'^2(u)] du^2. \quad (1.366)$$

Как установлено в п. 1.3.2.6,

$$G > 0, \quad (1.367)$$

значит, правая часть равенства (1.366) положительна. Из (1.366) вытекает, что

$$ds = \sqrt{1 + Gv'^2(u)} du,$$

следовательно,

$$|\widetilde{M_1 M_2}| = \int_{[\widetilde{M_1 M_2}]} ds = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{1 + Gv'^2(u)} du. \quad (1.368)$$

В силу (1.367)

$$1 + Gv'^2(u) > 1. \quad (1.369)$$

На основании (1.369) и строгого возрастания функции $x \rightarrow \sqrt{x}$ в промежутке $\bar{R}_+$

$$\sqrt{1 + Gv'^2(u)} > 1. \quad (1.370)$$

Из (1.370) и теоремы об интегрировании неравенства следует, что

$$\int_{u_1}^{u_2} \sqrt{1 + Gv'^2(u)} du > \int_{u_1}^{u_2} du = u_2 - u_1. \quad (1.371)$$

В силу (1.364), (1.368) и (1.371)

$$|\widetilde{M_1 M_2}| > \|M_1 M_2\| \text{ для всех } [\widetilde{M_1 M_2}] \in M;$$

это равносильно неравенству (1.360), которое требовалось установить.

1.5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ РАБОЧИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

1. Цилиндрические поверхности. Пусть A_0 — плоскость, L — расположенная в ней произвольная кривая класса C^2 , а B совокупность всех перпендикулярных к A_0 и пересекающих линию L прямых. Образованная ими поверхность называется цилиндрической или цилиндром, L — ее направляющей кривой или, короче, направляющей, а прямые семейства $B(L)$ — образующими этого цилиндра. В тех случаях, когда это не может привести к неясности, будем писать B вместо $B(L)$.

Сформулированное определение может быть уточнено следующим образом: множество всех, лежащих на прямых, перпендикулярных некоторой плоскости и пересекающих расположенную в ней гладкую линию, называется цилиндрической поверхностью. Отсюда следует, что точка принадлежит цилиндру тогда и только тогда, когда ее ортогональная проекция на плоскость его направляющей L лежит на кривой L .

Направляющая может быть как открытой, так и замкнутой линией. В дальнейшем будем считать ее открытой и предполагать, что $L \in C^2$. В прикладных задачах направляющей является, как правило, простой кусок гладкой кривой.

Если плоскости A и A_0 параллельны, то A перпендикулярна всем образующим цилиндра $B(L)$ и пересекает его по линии, конгруэнтной кривой L . Отсюда следует, что в качестве направляющей может быть принята линия пересечения поверхности B любой плоскостью, ортогональной образующим (достаточно, чтобы эта плоскость была перпендикулярной одной из них).

2. Уравнения цилиндрической поверхности. Введем прямоугольную систему координат $Oxyz$, совместив плоскости A_0 и Oxy . Пусть направляющей служит линия

$$L: y = f(x), \quad f \in C^2(I).$$

Тогда параметрическими уравнениями поверхности $B(L)$ будут

$$\begin{cases} x = u \\ y = f(u) \\ z = v \end{cases} \quad u \in I, \quad v \in R. \quad (1.372)$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно установить, что если координатами точки M_0 являются $(u_0; f(u_0); v_0)$, $(u_0 \in I \text{ и } v_0 \in R)$

произвольны), то $M_0 \in B(L)$ и наоборот, любая лежащая на $B(L)$ точка имеет координаты вида $(u_0; f(u_0); v_0)$. Рассмотрим точку $M_0(u_0; f(u_0); v_0)$ при любых $u_0 \in I$ и $v_0 \in R$. Ее ортогональной проекцией на плоскости A_0 служит $(u_0; f(u_0))$, т. е. точка направляющей L , значит, $M_0 \in B(L)$. Пусть, наоборот, $M_0 \in B(L)$. Тогда ортогональная проекция точки M_0 на плоскость A_0 лежит на L , имея, следовательно, координаты вида $(u_0; f(u_0))$. Поэтому M_0 обладает координатами $(u_0; f(u_0); v_0)$, где v_0 — аппликата точки M_0 .

Аналогично доказывается, что в случае параметрического задания направляющей

$$L: x=x(t), y=y(t); x, y \in C^2, \quad (1.373)$$

уравнениями цилиндрической поверхности $B(L)$ будут

$$\begin{cases} x = x(u), \\ y = y(u), u \in I, v \in R. \\ z = v \end{cases} \quad (1.374)$$

Пусть, наконец, линия L задана уравнением вида $F(x; y)=0$. Тогда $B(L)$ описывается аналитически системой

$$\begin{cases} F(x; y)=0, \\ z \in R \end{cases} \quad \text{— произвольно.}$$

Это выражают формулировкой: уравнение с двумя переменными изображает цилиндрическую поверхность в трехмерном пространстве. Точнее, в системе координат $Oxyz$ равенство любого из видов $F(x; y)=0$, $F(y; z)=0$ или $F(x; z)=0$, где F — гладкая функция, описывает цилиндр; его направляющая лежит соответственно в плоскости (xOy) , (yOz) или (zOx) .

3. Первая основная квадратичная форма цилиндрической поверхности. Из (1.372) вытекает, что

$$x_u=1, y_u=f'(u), z_u=0, \quad (1.375)$$

$$x_v=0, y_v=0, z_v=1. \quad (1.376)$$

В силу (1.279)...(1.280), (1.375) и (1.376)

$$E=1+f'^2(u), F=0, G=1. \quad (1.377)$$

Если ds — дифференциал длины дуги, лежащей на поверхности $B(L)$, то на основании (1.282) и (1.377)

$$ds^2 = (1+f'^2(u))du^2 + dv^2. \quad (1.378)$$

К виду (1.378) может быть приведена, путем надлежащего выбора криволинейных координат, первая основная квадратичная форма цилиндрической поверхности, направляющая которой — график произвольной функции $f \in C^1(I)$.

4. Геодезические линии цилиндрической поверхности. Из (1.377) следует, что

$$E_u=2f'(u)f''(u), F_u=0, G_u=0, \quad (1.379)$$

$$E_v=0, F_v=0, G_v=0. \quad (1.380)$$

В силу (1.337), (1.338), (1.353), (1.354), (1.377), (1.374) и (1.380)

$$\mathcal{A} = (1+f'^2(u)) du, \quad (1.381)$$

$$\mathcal{B} = dv, \quad (1.382)$$

$$\mathcal{C} = (1+f'^2(u)) d^2u + f'(u)f''(u)du^2, \quad (1.383)$$

$$\mathcal{D} = d^2v. \quad (1.384)$$

Пусть u — независимая переменная, а $g(u)$ — произвольная функция класса C^2 . Тогда $g''(u) = \frac{d^2g(u)}{du^2}$ или, что то же,

$$d^2g(u) = g''(u)du^2. \quad (1.385)$$

Положим

$$g(u) = u, \quad (1.386)$$

вследствие чего

$$g''(u) = 0. \quad (1.387)$$

Подставляя в (1.385) вместо $g(u)$ и $g''(u)$ их значения из (1.386) и (1.387), убеждаемся в том, что если u — аргумент, то

$$d^2u = 0. \quad (1.388)$$

Примем в (1.381)...(1.384) в качестве независимой переменной; v будет, следовательно, функцией от u . Ввиду этого и вследствие равенства (1.388)

$$\mathcal{C} = f'(u)f''(u)du^2. \quad (1.389)$$

На основании (1.381), (1.382), (1.384), (1.389) и формулы $\mathcal{B}: \mathcal{A} = \mathcal{D}: \mathcal{C}$, эквивалентной соотношению (1.335), дифференциальным уравнением геодезических линий поверхности $B(L)$ будет

$$\frac{dv}{(1+f'^2(u))du} = \frac{d^2v}{f'(u)f''(u)du^2},$$

т. е.

$$\frac{v'(u)}{1+f'^2(u)} = \frac{v''(u)}{f'(u)f''(u)},$$

что равносильно уравнению

$$\frac{v''(u)}{v'(u)} = \frac{f'(u)f''(u)}{1+f'^2(u)}. \quad (1.390)$$

Пусть f и v — произвольные функции класса C^2 . Тогда

$$(\ln v'(u))' = \frac{v''(u)}{v'(u)}, \quad (1.391)$$

$$\frac{1}{2} \ln(1 + f'^2(u))' = \frac{f'(u)f''(u)}{1 + f'^2(u)}. \quad (1.392)$$

В силу (1.391) и (1.392), соотношение (1.390) представимо в виде

$$\frac{d}{du} \ln v'(u) = \frac{d}{du} \ln \sqrt{1 + f'^2(u)}. \quad (1.393)$$

Интегрируя обе части (1.393), получаем

$$\ln v'(u) = \ln \sqrt{1 + f'^2(u)} + \ln c_1 = \ln c_1 \sqrt{1 + f'^2(u)} \quad (\text{через } c_1 \text{ обозначена постоянная интегрирования}), \text{ откуда}$$

$$v'(u) = c_1 \sqrt{1 + f'^2(u)}, \quad (1.394)$$

значит,

$$v(u) = c_1 \int \sqrt{1 + f'^2(u)} du + c_2, \quad (1.395)$$

где $c_2 = \text{const}$. Тем самым получено внутреннее уравнение (см. п. 1.3.22) геодезических линий цилиндрической поверхности, имеющей заданную направляющую. В соответствии с доказанным в п. 1.3.2.2 они образуют двупараметрическое семейство: параметрами служат c_1 и c_2 .

Опишем геодезическую (1.395) с помощью переменных x , y и z . В силу (1.372) и (1.395)

$$z = c_1 \int \sqrt{1 + f'^2(x)} dx + c_2$$

или, что равносильно,

$$z = c_1 \int_0^x \sqrt{1 + f'^2(\xi)} d\xi + c_2 \quad (1.396)$$

(чтобы отличить верхний предел интеграла в (1.396) от переменной интегрирования, она обозначена через ξ). Геометрический смысл равенства (1.396) следует из того, что

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + f'^2(\xi)} d\xi \quad (1.307)$$

— длина дуги направляющей цилиндра B . Если $c_1 = 1$ и $c_2 = 0$, то (1.396) обретает форму $z = s(x)$.

При любых фиксированных c_1 и c_2 соотношение (1.396) — уравнение некоторой линии L_2 , лежащей в плоскости xOz . Оно изображает также, согласно п. 1.5.2, цилиндрическую поверхность $B(L_2)$, с направляющей L_2 и образующими, перпендикулярными к (xOz) . Кривые L_2 , а значит, и цилиндры $B(L_2)$ обра-

зуют двупараметрическое множество. Каждая геодезическая исходной поверхности $B(L_2)$ представляет собой линию пересечения цилиндра $B(L_2)$ с одной из поверхностей семейства (1.396). Любая из этих геодезических описывается, следовательно, системой вида

$$\begin{cases} y = f(x), \\ z = c_1 \int_0^x \sqrt{1 + f'^2(\xi)} d\xi + c_2. \end{cases} \quad (1.398)$$

Убедимся в том, что каждая направляющая цилиндра будет его геодезической линией. Пусть L_0 — лежащий в плоскости (xOy) и проходящий через начало координат гладкий криволинейный отрезок (см. п. 1.2.5). Он служит графиком функции вида

$$y = f(x), \quad f \in C^1(I), \quad (1.399)$$

причем

$$0 \in I, \quad f(0) = 0. \quad (1.400)$$

Его можно считать и куском пространственной линии $\vec{r} = \vec{r}(t)$, описываемом уравнением

$$x = t, \quad y = f(t), \quad z = 0; \quad t \in I. \quad (1.401)$$

Вектором касательной к этой кривой в ее текущей точке будет (см. п. 1.2.13)

$$\vec{r}' = \{1; f'(t); 0\}. \quad (1.402)$$

Рассмотрим цилиндр B с направляющей L_0 . Ось (Oz) — его образующая. Если z_0 — произвольное действительное число, то $M_0(0; 0; z_0) \in (Oz)$. Поэтому параметрическими уравнениями проходящей через M_0 направляющей L_{z_0} цилиндра $B(L_0)$ являются

$$L_{z_0}: x = t; \quad y = f(t); \quad z = z_0. \quad (1.403)$$

Сопоставление равенства (1.401) и (1.403) показывает, что вектором касательной к ней служит (1.402).

Как установлено в п. 1.4.2, через M_0 , в любом направлении $\vec{\tau}$, компланарном касательной плоскости, проведенной в точке M_0 к поверхности $B(L_0)$, проходит, и притом единственная, геодезическая $\Gamma(z_0; \vec{\tau})$ цилиндра $B(L_0)$:

$$M_0(0; 0; z_0) \in \Gamma(z_0; \vec{\tau}). \quad (1.404)$$

Из (1.338) следует, что она принадлежит семейству

$$x = t, \quad (1.405)$$

$$y = f(t), \quad (1.406)$$

$$z = c_1 \int_0^t \sqrt{1 + f'^2(\xi)} d\xi + c_2, \quad (1.407)$$

т. е. линия $\vec{\Gamma}(z_0; \tau)$ задается уравнениями (1.405)...(1.407) при определенных значениях параметров c_1 и c_2 . Полагая в (1.405)...(1.407) $t=0$, получим в силу (1.400) и (1.404)

$$c_2 = 0. \quad (1.408)$$

На основании (1.405)...(1.407) вектором касательной к кривой $\vec{\Gamma}(z_0; \tau)$ в ее текущей точке будет

$$\{1; f'(t); c_1 \sqrt{1 + f'^2(t)}\},$$

а в точке M_0

$$\vec{\tau} = \{1; f'(0); c_1 \sqrt{1 + f'^2(0)}\}. \quad (1.409)$$

Определим c_1 так, чтобы линии L_{z_0} и $\vec{\Gamma}(z_0; \tau)$ имели общую касательную в точке M_0 , т. е.

$$\vec{\tau} \parallel \vec{r}(0). \quad (1.410)$$

В силу (1.402), (1.410) и условия коллинеарности векторов

$$c_1 = 0. \quad (1.411)$$

Из (1.405)...(1.407), (1.408) и (1.411) следует, что

$$\vec{\Gamma}(z_0; \tau) : \begin{cases} x = t, \\ y = f(t), \quad t \in I, \\ z = z_0 \end{cases} \quad (1.412)$$

На основании (1.403) и (1.412) кривые L_{z_0} и $\vec{\Gamma}(z_0; \tau)$ совпадают.

Тем самым установлено, что геодезическая линия регулярной цилиндрической поверхности, имеющая в любой из своих точек общую касательную с направляющей, проходящей через эту точку, совпадает с данной направляющей.

Глава 2

СВЯЗЬ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ И СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПОЧВООБРАБАТЫВАЮЩЕЙ МАШИНЫ. КВАЗИИНЕРЦИАЛЬНОСТЬ СВЯЗАННОЙ С ЕЕ РАМОЙ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

2.1. ПОСТАНОВКА ВОПРОСА

Пусть t — время; $t=0$ и $t=T=\text{const}>0$ — начало и конец рабочего процесса, выполняемого мобильной сельскохозяйственной машиной; $\vec{v} = \vec{v}(t) \in c[0, T]$ — ее поступательная скорость при $0 \leq t \leq T$. Если при описании этого рабочего процесса задано равенство вида

$$v = v_0, \quad t \in [0; T], \quad (2.1)$$

где $v_0 = \text{const}>0$, то в действительности $v(t)$ ($0 \leq t \leq T$) — функция типа той, что изображена на рис. 13. Поэтому возникает вопрос о связи между соотношением (2.1) и действительным поведением функции $v(t)$. Эта связь основывается на вводимом в п. 2.2.2 понятии среднего значения.

Аналогичное имеет место и по отношению к другим функциям, характеризующим процессы, совершаемые сельскохозяйственными машинами и их рабочими органами.

2.2. СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ РАБОЧИЕ ПРОЦЕССЫ

1. Среднее арифметическое чисел. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — произвольные действительные постоянные ($n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$). Число $\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ называется их средним арифметическим. Обозначим его через $M(a_1; \dots; a_n)$:

$$M(a_1; \dots; a_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k. \quad (2.2)$$

В дальнейшем найдет применение обобщение этого понятия — среднее значение функции на отрезке.

2. Среднее значение функции; ее отклонение от среднего значения. Постоянство в среднем. Серединная плоскость микрорельефа. Пусть $a, b = \text{const}$, причем $a < b$. Обозначим через n натуральный

параметр, значение которого будем считать сначала фиксированным (и отличным от единицы). Определим x_0 , Δx , h и x_k с помощью равенств

$$x_0 = a; \quad (2.3)$$

$$\Delta x = h = \frac{b-a}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \quad (2.4)$$

$$x_k = a + kh, \quad k \in \{1; \dots; n\}. \quad (2.5)$$

В силу (2.4) и (2.5) $x_n = b$. Рассмотрим конечную числовую последовательность

$$\{x_0; x_1; \dots; x_n\}. \quad (2.6)$$

Из (2.3)...(2.5) следует что она является арифметической прогрессией. Ее первый член равен a , разность — h , число членов $(n+1)$,

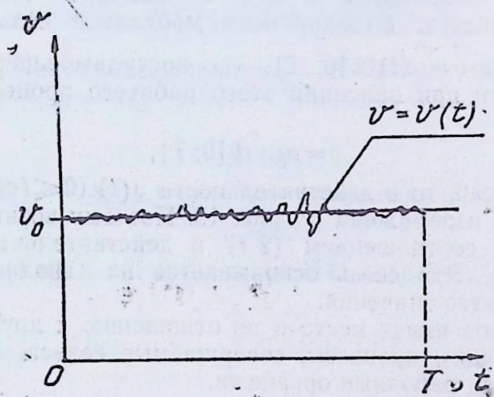


Рис. 13

последний член b . Равноотстоящими точками (2.6) промежутков $[a; b]$ разбит на n интервалов $[x_{k-1}; x_k]$, длина каждого из которых равна h .

Пусть на отрезке $[a; b]$ задана числовая функция f класса $C[a; b]$. Среднее арифметическое ее значений в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$ равно

$$M(f(x_1), \dots; f(x_n)) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k). \quad (2.7)$$

На основании (2.3) и (2.7)

$$M(f(x_1), \dots; f(x_n)) = \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x. \quad (2.8)$$

Будем считать теперь натуральный параметр n переменным. Из интегрального исчисления известно [7, 22], что если $f \in C[a; b]$, то предел суммы

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x$$

при $n \rightarrow \infty$ существует и равен

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Поэтому в соотношении (2.8) может быть выполнен переход к пределу при $n \rightarrow \infty$, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(f(x_1), \dots; f(x_n)) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (2.9)$$

Правая часть равенства (2.9) называется средним значением функции f (или ее средним арифметическим) на отрезке $[a; b]$. Введем обозначение

$$M(f; a, b) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (2.10)$$

(запись $M(f; a, b)$ указывает на то, что правая часть равенства (2.10) зависит от f , a и b ; там, где это не может привести к неясности, вместо $M(f; a, b)$ будем писать Mf . Если $a, b = \text{const}$ и функция f зафиксирована, то $M(f; a, b) = \text{const} \in \mathbb{R}$. Назовем переход от f к $M(f; a, b)$ по формуле (2.10) усреднением функции f на отрезке $[a; b]$.

Выясним геометрический смысл среднего значения Mf . Ограничимся случаем, когда $f(x) > 0$ для всех $x \in [a; b]$. Пусть $\gamma = \gamma(f; a, b)$ — фигура («криволинейная трапеция»), ограниченная линиями

$$y=0, \quad y=f(x); \\ x=a, \quad x=b,$$

а $s = s(f; a, b)$ — ее площадь (отрезок $[a; b]$ оси абсцисс называется основанием фигуры). Тогда

$$s = \int_a^b f(x) dx. \quad (2.11)$$

В силу (2.10) и (2.11)

$$s(f; a, b) = (b-a) M(f; a, b). \quad (2.12)$$

Из (2.12) следует, что среднее значение функции f на отрезке $[a; b]$ равно длине высоты прямоугольника, равновеликого криволинейной трапеции $\gamma(f; a, b)$ и имеющего с ней общее основание.

Назовем выражение $|f(x) - Mf|$, $a \leq x \leq b$ отклонением функции f от ее среднего значения на отрезке $[a; b]$ и введем оператор $\mathcal{D}^1$, определяемый на множестве $c[a; b]$ равенством

$$(\mathcal{D}f)(x) = |f(x) - Mf|. \quad (2.13)$$

Из (2.13) вытекает

$$(\mathcal{D}f)(x) \geq 0, \quad a \leq x \leq b, \quad (2.14)$$

Если существует такое, достаточно малое, $\varepsilon > 0$, что

$$(\mathcal{D}f)(x) \leq \varepsilon$$

для всех $x \in [a; b]$,

то будем говорить, что функция f отклоняется не более чем на ε от своего среднего значения при

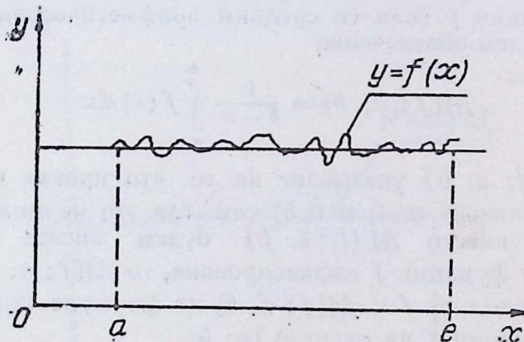


Рис. 14

$a \leq x \leq b$, или что она постоянна в среднем с точностью до ε на отрезке $[a; b]$ (взаимное расположение ее графика и прямой $y = Mf$ в случае выполнения равенства (2.14) показано на рис. 14). В этом случае можно положить

$$f(x) = Mf \text{ на } [a; b]$$

с абсолютной погрешностью, не превышающей ε .

Пусть $t \rightarrow \vec{f}(t)$ — вектор-функция класса $c[t_1; t_2]$ ($t_1, t_2 = \text{const} \in \mathbb{R}$, $t_1 < t_2$). Положим по определению

$$M\vec{f} = M(\vec{f}; t_1; t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \vec{f}(t) dt; \quad (2.15)$$

¹ Оператором называется закон соответствия или правило, согласно которому каждой функции (принадлежащей определенному множеству функций) ставится в соответствие некоторая функция. В данном случае оператор $\mathcal{D}$ ставит функции f в соответствие функцию $|f(x) - Mf|$.

вместо $M(\vec{f}; 0; T)$ будем писать $M(\vec{f}; T)$. Из (2.15) следует, что если $\vec{f}$, t_1 и t_2 зафиксированы, то $M\vec{f}$ — постоянный вектор.

Назовем его средним значением функции $\vec{f}$ в промежутке времени $[t_1; t_2]$. Аналогично предыдущему, под постоянством в среднем вектор-функции $\vec{f}$ на отрезке $[t_1; t_2]$ с точностью до ε будем подразумевать выполнение условия $(\mathcal{D}\vec{f})(t) \leq \varepsilon$ для всех $t \in [t_1; t_2]$, где неотрицательная числовая функция $(\mathcal{D}\vec{f})(t)$ (отклонение $\vec{f}$ от $M\vec{f}$) определяется равенством

$$(\mathcal{D}\vec{f})(t) = |\vec{f}(t) - M\vec{f}|.$$

а $\varepsilon > 0$ достаточно мало.

Приведенный ниже пример позволит уяснить физический смысл постоянства функции в среднем. Пусть $\vec{v}_0 = \text{const}$. Понимаемое дословно утверждение «в течение промежутка времени мобильная машина движется поступательно со скоростью $\vec{v}_0$ » заведомо неверно, ибо, как показывают достаточно точные измерения, даже при движении автомобиля по автострате невозможно добиться строго одинаковой во все моменты времени поступательной скорости и тождественного равенства нулю угловой скорости. Данное высказывание истинно, лишь если считать его сокращенной формулировкой следующего утверждения: поступательная скорость $\vec{v} = \vec{v}(t)$ мобильной машины и ее угловая скорость $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ вращения вокруг мгновенной оси удовлетворяют условиям

$$M(\vec{v}; t_1, t_2) = \vec{v}_0, \quad (2.16)$$

$$(\mathcal{D}\vec{v})(t) \leq \varepsilon \text{ для всех } t \in [t_1; t_2], \quad (2.17)$$

$$|M(\vec{\omega}; t_1, t_2)| \leq \delta, \quad (2.18)$$

где $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ достаточно малы. Если выполнены одновременно соотношения (2.16) ... (2.18) для положительных, близких к нулю ε и δ , то можно принять, что равенства $\vec{v}(t) = \vec{v}_0$ и $\vec{\omega}(t) = 0$ выполняются при $t_1 \leq t \leq t_2$ с высокой степенью точности.

Пусть $Oxyz$ — прямоугольная система координат; $\mathcal{C}$ — гладкая замкнутая несамопересекающаяся кривая, лежащая в плоскости Oxy ; S — конечная область, границей которой служит линия $\mathcal{C}$; S — площадь фигуры S ; $z = f(x; y)$ — заданная в области S функция класса $c(S)$ (там, где это не может вызвать неясности, вместо $f(x; y)$ будем писать f). Положим, по определению

$$M(t; S) = \frac{1}{S} \iint_S f(x; y) dx dy \quad (2.19)$$

и назовем $M(f; S)$ средним значением f в области S .

Для выяснения его геометрического смысла допустим, что $f(x; y) > 0$ всюду в S (это может быть достигнуто всегда надлежащим выбором системы координат). Пусть V — объем тела γ , ограниченного фигурой S (ее называют основанием данного тела), графиком функции $z=f(x; y)$ и цилиндрической поверхностью с направляющей $\odot$ и образующими, параллельными оси Oz . Тогда

$$V = \iint_S f(x; y) dx dy. \quad (2.20)$$

В силу (2.19) и (2.20)

$$V = S M(f; S). \quad (2.21)$$

Из (2.21) следует, что $M(f; S)$ — длина высоты цилиндра, равносильного телу γ и имеющего общее основание с ним. Назовем плоскость

$$y = M(f; S) \quad (2.22)$$

серединной плоскостью поверхности

$$z=f(x; y). \quad (2.23)$$

Если уравнение (2.23) описывает дневную поверхность почвы (в этом случае систему координат целесообразно выбрать так, что плоскость (xOy) горизонтальна, а положительный луч оси (Oz) направлен вверх), то под срединной плоскостью микрорельефа поля подразумеваем плоскость (2.22).

2.3. УСЛОВИЯ КВАЗИИНЕРЦИАЛЬНОСТИ ПОДВИЖНОЙ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА, ЖЕСТКО СВЯЗАННОЙ С РАМОЙ ПОЧВООБРАБАТЫВАЮЩЕЙ МАШИНЫ

Любое механическое движение относят к определенной системе координат — подвижной или неподвижной (т. е. его считают совершающимся по отношению к некоторой системе отсчета). При исследовании взаимодействия рабочих органов почвообрабатывающей машины с почвой, имеющего место во время технологического процесса, выполняемого машиной, движение почвенных частиц по рабочей поверхности относят всегда к подвижной системе координат, жестко связанной с данной поверхностью. Тем самым возникает вопрос о том, допустимо ли описание этого движения с помощью второго закона Ньютона в классическом виде

$$mr = \vec{F}. \quad (2.24)$$

Действительно, форма этого закона зависит от кинематического состояния системы отсчета, по отношению к которой считается

совершающимся описываемое им движение, т. е. к которой отнесены векторы $\vec{r}$ и $\vec{F}$. В случае движущейся системы координат он имеет вид (2.24) тогда и только тогда, когда она инерциальна [1, 2, 3, 11, 17, 18]. В любом другом случае левая часть этой формулы содержит дополнительные слагаемые, обусловленные перемещением подвижной системы. Поэтому возникает вопрос об условиях, при выполнении которых систему координат, жестко связанную с рабочим органом почвообрабатывающей машины, совершающей свой технологический процесс, можно с достаточной для практики точностью (т. е. с пренебрежимо малой относительной погрешностью конечных результатов) считать инерциальной. Ниже формулируются эти условия.

Пусть Γ — срединная плоскость микрорельефа обрабатываемого поля: $t=0$ и $t=T$ — начало и конец рабочего процесса; M — центр масс рабочего органа; $h=h(t)$ — расстояние точки M от плоскости Γ ; $\vec{h}_0 = M(h; T)$; $\vec{v} = \vec{v}(t)$ — поступательная скорость машины; $\vec{v}_0 = M(\vec{v}; T)$; $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ — угловая скорость вращения рабочего органа вокруг мгновенной оси при $0 \leq t \leq T$. Если имеют место одновременно неравенства

$$(h)(t) \leq a_1, \quad t \in [0; T], \quad (2.25)$$

$$(\vec{v})(t) \leq a_2, \quad t \in [0; T], \quad (2.26)$$

$$|M(\vec{\omega}; T)| \leq a_3, \quad (2.27)$$

где a_1 , a_2 и a_3 положительны и достаточно малы, то подвижную систему отсчета, связанную с рабочим органом, можно с высокой степенью точности принять в качестве инерциальной. Это утверждение допускает также следующую формулировку. Предположим, что во время технологического процесса, выполняемого почвообрабатывающей машиной, поступательная скорость рабочего органа и расстояние его центра масс от срединной плоскости микрорельефа обрабатываемого поля постоянны в среднем, а мгновенная угловая скорость данного рабочего органа равна в среднем нулю. Тогда любую жестко связанную с ним систему координат можно рассматривать как инерциальную; относительная погрешность результатов пренебрежимо мала.

Будем считать всюду в дальнейшем условия (2.25)...(2.27) выполненными. Очевидно, что только при их соблюдении совершаемый машиной технологический процесс может удовлетворять агротехническим критериям качества. Каждую подвижную систему отсчета, жестко связанную с рабочей поверхностью (или, что равносильно, с рамой машины) назовем в этом случае квазиинерциальной, соотношения (2.25)...(2.27) — достаточными условиями квазиинерциальности, а рабочий процесс — квазистационарным.

Глава 3

ДВИЖЕНИЕ ПОЧВЕННЫХ ЧАСТИЦ ПО РАБОЧЕЙ ПОВЕРХНОСТИ РЫХЛИТЕЛЬНОЙ ЛАПЫ. ОПТИМИЗАЦИЯ ЕЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

3.1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Под материальной точкой (применяются и равнозначные термины «материальная частица», «масса, сосредоточенная в точке», «точечная масса», «частица» и т. п.) будем подразумевать геометрическую точку, которой поставлена в соответствие функция $m=m(t)$ (t — время), называемая массой данной точки и удовлетворяющая следующим требованиям.

1°. Она определена в некотором промежутке I и либо непрерывна в нем, либо имеет точки разрыва первого рода [7; 22], число которых конечно в любом содержащемся в I ограниченном интервале.

2°. Она принимает только положительные значения, т. е. $m(t) > 0$ во всех ее точках непрерывности; если же $m(t)$ терпит разрыв при $t = t_0 \in I$, то $\lim_{t \rightarrow t_0-0} m(t) > 0$ и $\lim_{t \rightarrow t_0+0} m(t) > 0$.

Условие 1° означает, что масса материальной точки может изменяться и скачкообразно. Физически это соответствует откалыванию части тела, рассматриваемого как материальная точка, или присоединению массы в результате соударения.

Пусть $m(t) = m_0 = \text{const} > 0$ для всех $t \in I$. Тогда M называется материальной точкой постоянной массы. В общем случае, т. е. если функция $m(t)$ не постоянна в промежутке I , говорят о точке переменной массы. Всюду в дальнейшем предполагаем, что $m = \text{const}$, а поэтому под материальной точкой (или частицей) будем подразумевать постоянную точечную массу.

При аналитическом описании механических явлений можно в ряде случаев отождествлять твердое тело с материальной точкой, сохраняя вместе с тем большую точность результатов, относящихся к его движению. Это имеет место тогда, когда перемещение данного тела — чисто поступательное, а его линейные размеры достаточно малы по сравнению с расстояниями, пройденными его центром масс в рассматриваемом движении. Отсюда вытекает, что при исследовании технологических процессов, совершаемых рабочими органами почвообрабатывающих машин, почвенные

частицы можно считать, с высокой степенью точности, материальными точками.

Движение материальной точки M однозначно определено, если:

1) в пространстве введена система координат $Oxyz$; будем считать ее прямоугольной. Она может быть неподвижной или подвижной (см. п. 2.3);

2) координаты $(x; y; z)$ точки M в системе $Oxyz$ — заданные функции временной переменной t

$$x=x(t), y=y(t), z=z(t), \quad (3.1)$$

принадлежащие классу $C^2(I)$, где I — промежуток времени, в течение которого происходит движение. Это равносильно векторной функции

$$\vec{OM} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

(будем писать также M_t вместо M , чтобы указать на зависимость положения данной точки от времени). Очевидно, что

$$\vec{r}(t) \in C^2(I). \quad (3.2)$$

Описываемая уравнениями (3.1) или, что то же, векторной функцией $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ($\vec{r} = \vec{OM}$) кривая L (см. п. 1.2.12) называется траекторией точки M в интервале времени I или годографом вектора $\vec{r}(t)$ при $t \in I$. Будем считать все встречающиеся в дальнейшем траектории незамкнутыми и несамопересекающимися линиями, ибо только этот случай найдет применение в рассматриваемых ниже проблемах.

В силу (3.2) линия L спрямляема (см. п. 1.2.3 и 1.2.14), значит, любой паре M_1, M_2 ее точек соответствует, и притом единственное, неотрицательное число $|\vec{M_1M_2}|$ — длина дуги $[\vec{M_1M_2}]$,

вычисляемая по формуле $|\vec{M_1M_2}| = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{r}}(t)| dt$ ($|\vec{M_1M_2}| = 0$ тогда

и только тогда, когда M_1 и M_2 соответствуют).

Утверждение «на годографе L введена криволинейная система отсчета» или «траектория L оснащена криволинейной системой отсчета» (если это не может стать причиной неясности, будем опускать слово «криволинейная») означает, что

1) на линии L зафиксирована произвольная точка, называемая началом отсчета криволинейных абсцисс (в тех случаях, когда это не может стать причиной неясности, будем пользоваться более коротким термином «начало отсчета»);

2) выбрана единица измерения длины дуг кривой L ;

3) одно из двух возможных направлений обхода траектории L точкою M_t принято в качестве положительного.

Очевидно, что лишь на спрямляемой линии может быть введена система отсчета. Пусть ею оснащен годограф L . Тогда (см. п. 1.2.2 и 1.2.14) каждой его точке соответствует, и притом единственное, действительное число — ее криволинейная абсцисса (или дуговая координата). Если M_0 — начало отсчета, а s_M — криволинейная абсцисса точки M , то $|s_M| = |\overline{M_0 M}|$, а знак числа s_M определяется выбором положительного направления обхода траектории L и взаимным расположением точек M_0 и M (см. п. 1.2.4).

Пусть заданы:

- 1) траектория L точки $M_t (L \in C^2)$,
- 2) система отсчета на линии L ,
- 3) криволинейная абсцисса s точки M как функция времени

$$s = s(t), \quad s(t) \in C^1(I). \quad (3.3)$$

Тогда движение точки M_t однозначно определено, а уравнение (3.3) называется ее законом движения в естественной форме.

Из спрямляемости кривой L следует возможность ее натуральной параметризации (см. п. 1.2.4 и 1.2.14). Уравнения траектории L представимы поэтому в виде

$$\vec{r} = \vec{r}(s), \quad (3.4)$$

или, что то же,

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s), \quad (3.5)$$

где s — криволинейная абсцисса текущей точки $M(x, y, z)$ годографа L (см. п. 1.2.4 и 1.2.14). Равенства (3.4) и (3.3) или (3.5) и (3.3) однозначно определяют движение точки M в пространстве.

Дифференцирование радиус-вектора $\vec{r}$ по времени (если $\vec{r} = \vec{r}(t)$) будем обозначать точками $\dot{\vec{r}} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}, \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right)$, а по натуральному параметру (при $\vec{r} = \vec{r}(s)$) — штрихами $\left(\vec{r}' = \frac{d\vec{r}}{ds}, \vec{r}'' = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right)$. В п. 1.2.15 установлено, что

$$\vec{r}'(s) = \vec{\tau}(s), \quad (3.6)$$

где $\vec{\tau}(s)$ — единичный вектор касательной к линии L в ее точке с криволинейной абсциссой s :

$$|\vec{\tau}(s)| = 1 \text{ для всех } s. \quad (3.7)$$

Найдем связь между $\vec{r}$ и $\vec{r}'$. Вследствие теоремы о производной сложной функции

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt},$$

т. е.

$$\dot{\vec{r}} = \dot{s}(t) \vec{r}'. \quad (3.8)$$

Из (3.6) и (3.8) вытекает, что

$$\dot{\vec{r}} = \dot{s} \vec{\tau}. \quad (3.9)$$

В силу (3.3) орт $\vec{\tau}$ может быть представлен и в виде функции времени

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}(s(t)). \quad (3.10)$$

Согласно сказанному выше $\vec{\tau}, s \in C^1$, значит, правая часть (3.10) дифференцируема, причем

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}. \quad (3.11)$$

На основании первой формулы Френе (см. п. 1.2.15)

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho} \vec{\nu}. \quad (3.12)$$

Из (3.11) и (3.12) следует, что

$$\dot{\vec{\tau}} = \frac{\dot{s}}{\rho} \vec{\nu}, \quad (3.13)$$

где под ρ и $\vec{\nu}$ подразумеваются соответственно $\rho(s(t))$ и $\vec{\nu}(s(t))$.

Скорость $\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t)$ и ускорение $\vec{\omega} = \ddot{\vec{r}}(t)$ точки M_t задаются, как известно, формулами

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t), \quad (3.14)$$

$$\vec{\omega} = \ddot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{v}}(t). \quad (3.15)$$

Наряду с $\vec{v}(t)$ и $\vec{\omega}(t)$ будем пользоваться записями $\vec{v}(M)$ и $\vec{\omega}(M)$, где через $\vec{v}(M)$ обозначен вектор скорости точки M_t в момент ее совпадения с геометрической точкой M траектории L ; аналогично определяется $\vec{\omega}(M)$.

В силу (3.8) и (3.13)

$$\vec{u} = \dot{s}\vec{\tau}, \quad (3.16)$$

или в более подробной записи

$$\vec{v}(t) = \dot{s}(t)\vec{\tau}(L; M_t), \quad (3.17)$$

(см. п. 1.2.15); $\dot{s}(t)$ называют линейной скоростью точки M_t при ее движении по траектории L .

Из (3.16) следует, что вектор скорости $\vec{v}(M)$ направлен всегда по касательной к траектории L в точке M , причем $\vec{v}(M) \uparrow \uparrow \uparrow \vec{\tau}(L; M)$ или $\vec{v}(M) \uparrow \downarrow \vec{\tau}(L; M)$ в зависимости от того, какое из неравенств $\dot{s} > 0$ или $\dot{s} < 0$ выполняется при данном значении t .

На основании (3.7) и (3.16)

$$v(t) = \left| \frac{ds}{dt} \right|. \quad (3.18)$$

откуда

$$\dot{s}^2(t) = v^2. \quad (3.19)$$

В силу (3.13), (3.15) и (3.19)

$$\vec{w} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\vec{\tau}) = \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s}\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \ddot{s}\vec{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{\nu} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{\nu}. \quad (3.20)$$

Векторы $\ddot{s}\vec{\tau}$ и $\frac{v^2}{\rho}\vec{\nu}$ называются касательной (тангенциальной) и нормальной (или центростремительной) составляющими ускорения, а равенство (3.20) — теоремой о разложении ускорения на касательную и нормальную составляющие.

3.2. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Ниже перечислены предположения, на которых основано аналитическое описание движения почвенных частиц по рабочей поверхности рыхлительной лапы (а также по лемешно-отвальной поверхности) в течение совершаемого ею рабочего процесса.

1. Пусть выполнены условия (2.4)...(2.5), вследствие чего любую систему координат, неподвижную относительно рабочей поверхности, можно с большой точностью принять в качестве инерциальной. Серединную плоскость микрорельефа обрабатываемого поля будем считать горизонтальной.

2. Если S — рабочая поверхность чизельной лапы, то в соответствии с конструкцией данного рабочего органа предполагаем, что $S \in C^1$, вследствие чего поверхность S имеет в каждой точке нормаль (п. 1.3.2.3).

3. Согласно опытным данным соударения почвенных масс с рабочей поверхностью S (или с налипшей на нее почвой) во время технологического процесса неупругие и притом с ничтожно малым коэффициентом восстановления [23]. Поэтому данные удары можно считать, с высокой степенью точности, абсолютно неупругими. Отсюда следует, что в момент столкновения почвенного комка с рабочей поверхностью нормальная к S составляющая скорости комка (относительно лапы) обращается в нуль, а касательная составляющая сохраняется, становясь начальной скоростью для движения этой частицы по поверхности S под действием сил инерции и реакций.

4. Движение почвенной частицы по рабочей поверхности культиваторной лапы можно с достаточной для практики точностью описать путем его отождествления с движением по недеформируемой поверхности S материальной точки, в которой сосредоточена вся масса данного комка (ее можно с высокой степенью точности считать постоянной в течение всего рабочего процесса) и к которой приложены все действующие на него силы.

5. Траектория материальной точки, посредством которой описывается движение почвенной частицы по поверхности S , является линией класса C^2 . Она, следовательно, спрямляема, может быть задана посредством натуральной параметризации и обладает в каждой точке естественным (сопровождающим) трехгранником (см. п. 1.2.20) и радиусом кривизны.

Будем считать в дальнейшем все эти условия выполненными.

3.3. ТРАЕКТОРИИ ПОЧВЕННЫХ ЧАСТИЦ ПО РАБОЧЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

В соответствии со сказанным в п. 2.2.3, предположим, что в течение всего технологического процесса (т. е. при $0 \leq t \leq T$) выполняются условия его квазистационарности. Обозначив вектор поступательной скорости рабочего органа (в системе отсчета неподвижной относительно обрабатываемого поля) через $\vec{V}(t)$, положим $\vec{V}_0 = M(\vec{V}(t); T)$ (см. п. 2.2.2).

Пусть m — масса рассматриваемого комка почвы; M_0 — точка его столкновения с поверхностью S ; L — траектория его дальнейшего движения по ней; M_t — точка кривой L , определяющая положение комка в момент времени t (место M_t будем писать M , если это не может привести к неясности; при изучении движения почвенной частицы по рабочей поверхности примем, что $t=0$ — момент их соударения); $\mathcal{K}$ — произвольным образом выбранная система отсчета, неподвижная относительно лапы; O — начало координат в системе $\mathcal{K}$; $\vec{r}(t)$ — векторная функция, заданная соотношением $\vec{r}(t) = \vec{OM}_t$, вследствие чего уравнением линии L в системе отсчета $\mathcal{K}$ служит $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (согласно п. 3.3.1 $\vec{r}(t) \in C^2$);

$\vec{v} = \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}$; s — криволинейная абсцисса текущей точки траектории L (в качестве отсчета дуговых координат на кривой L принимаем M_0 , а положительное направление их отсчета соответствует восходящему движению комка по рабочей поверхности лапы); $s = s(t)$ — закон движения точки M по кривой L ($s(t) = |\vec{M}_0 \vec{M}_t|$); $\vec{\tau} = \vec{\tau}(s)$ и $\vec{n} = \vec{n}(s)$ — единичные векторы касательной и главной нормали к траектории L в ее точке с криволинейной абсциссой s (см. п. 1.2.15 и 1.2.16); $\rho = \rho(s)$ — радиус кривизны линии L в этой же точке; $\vec{v} = \vec{v}(M)$ — орт нормали к поверхности L в точке M ,

выбранный так, что $0 \leq (\vec{V}_0; \vec{n}) \leq \frac{\pi}{2}$, т. е. направленный в сторону необработанного почвенного массива; $\vec{F} = \vec{F}(M)$ — главный вектор системы активных сил, действующих на рассматриваемую частицу во время ее движения по рабочей поверхности.

Почвенный комок, перемещающийся по поверхности S , испытывает также воздействие системы диссипативных сил [23]; она состоит из сил сухого (кулонова) и квадратичного (ньютонова) трения. Любая из них направлена противоположно скорости частицы. Орт каждой диссипативной силы равен

$$-\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = -\frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = -\frac{\dot{s}(t)}{|\vec{v}(t)|} \cdot \vec{\tau}(s). \quad (3.21)$$

Соударившись с рабочей поверхностью в точке M_0 , почвенный комок перемещается затем по кривой L в направлении, соответствующем возрастанию криволинейных абсцисс (назовем такое движение восходящим). Поэтому $\dot{s}(t) > 0$, значит $\dot{s}(t) = |\dot{s}(t)|$ (см. (3.19)), вследствие чего выражение (3.21) равно $-\vec{\tau}(s)$. Отсюда

вытекает, что если $\vec{R}$ — главный вектор системы диссипативных сил, приложенных к частице почвы, совершающей восходящее движение по рабочей поверхности S , то

$$\vec{R} = -(fN + \lambda m v^2) \vec{\tau}, \quad (3.22)$$

где f и λ — коэффициенты сухого и квадратичного трения, а N — абсолютная величина силы нормального давления комка на поверхность S .

Из сказанного в п. 3.3.3 следует, что систему координат можно с высокой точностью считать инерциальной. Поэтому на основании теоремы об освобождении механической системы от наложенных на нее связей уравнением движения почвенной частицы по рабочей поверхности S будет (в системе отсчета K)

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} + N \vec{n} + \vec{R}. \quad (3.23)$$

Вследствие сказанного в п. 3.3.2 допустимо принять, сохраняя достаточную точность выводов, что изучаемое движение совершается под действием лишь сил инерции, реакций связей и диссипативных сил (в дальнейшем будут приняты во внимание и остальные силы). Отсюда и из теоремы о разложении ускорения по осям естественного трехгранника (см. 3.20) следует, что уравнение (3.23) примет вид (в силу 3.22)

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} \vec{\tau} + \frac{m v^2}{\rho} \vec{v} = N \vec{n} - (fN + \lambda m v^2) \vec{\tau}. \quad (3.24)$$

Умножим скалярно обе части (3.24) на векторное произведение $[\vec{\tau} \vec{v}]$ (см. п. 1.1.4). Получим

$$m s \vec{\tau} [\vec{\tau} \vec{v}] + \frac{m v^2}{\rho} \vec{v} [\vec{\tau} \vec{v}] = N \vec{n} [\vec{\tau} \vec{v}] - (fN + \lambda m v^2) \vec{\tau} [\vec{\tau} \vec{v}]. \quad (3.25)$$

На основании определения смешанного произведения трех векторов и принимая во внимание, что $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$ тогда и только тогда, когда $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, будем иметь (см. п. 1.1.4)

$$\vec{\tau} [\vec{\tau} \vec{v}] = \tau \tau v = 0, \quad (3.26)$$

$$\vec{v} [\vec{\tau} \vec{v}] = v \tau v = 0, \quad (3.27)$$

$$\vec{n} [\vec{\tau} \vec{v}] = \tau v n. \quad (3.28)$$

В силу (3.25)...(3.28)

$$\tau v n = 0, \quad (3.29)$$

во всех точках линии L . Согласно определениям главной нормали гладкой линии и нормали к поверхности (см. п. 1.2.16 и 1.3.2.3)

$$\vec{\tau} \perp \vec{v}, \quad \vec{n} \perp \vec{\tau}. \quad (3.30)$$

Из (3.29) и (3.30) вытекает, что $\vec{v} \parallel \vec{n}$, т. е. в каждой точке траектории L ее главная нормаль совпадает с нормалью к S в этой точке. Кривая S будет, следовательно, геодезической линией поверхности (см. п. 1.4). Таким образом, если технологический процесс, выполняемый рабочим органом почвообрабатывающей машины, квазистационарен, то траекториями почвенных частиц по рабочей поверхности служат ее геодезические линии.

В дальнейшем будет установлено, что применительно к рыхлительной лапе этот вывод остается в силе и в том случае, когда приняты во внимание все порождаемые рабочим процессом внешние силы, действующие на почвенный комок во время его движения по рабочей поверхности.

Пусть рабочий орган с цилиндрической рабочей поверхностью S , движущийся так, что выполняются условия квазистационарности (2.25) — (2.27), рыхлит почву. Тогда в точке соударения почвенной частицы с поверхностью S касательная к траектории частицы совпадает с касательной к проходящей через M_0 направляющей поверхности S (это установлено экспериментальным исследованием взаимодействия рабочих органов с почвенными частицами в ходе рабочего процесса). Назовем данное утверждение кинетическим условием рыхления почвы рабочим органом с цилиндрической рабочей поверхностью.

Кинематическое условие подкапывания почвы позволяет определить траектории комков по рабочей поверхности рыхлительной лапы. Действительно, согласно установленному выше, траекторией частицы является одна из проходящих через M_0 геодезических линий цилиндрической поверхности S (как показано в п. 1.4.2, через каждую точку M_0 рабочей поверхности S , в любом направлении, компланарном касательной плоскости к S в точке M_0 , проходит, и притом единственная, геодезическая поверхность S). В силу же доказанного в п. 1.4.4, геодезическая линия цилиндрической поверхности, имеющая в какой-либо точке M_0 общую касательную с проходящей через M_0 направляющей, совпадает с этой направляющей. Поэтому траекторией почвенного комка, столкнувшегося в точке M_0 с рабочей поверхностью рыхлительной лапы, будет проходящая через M_0 направляющая цилиндрической поверхности S . Движение почвенной частицы происходит, следовательно, по выпуклой вниз кривой L класса C^2 , расположенной в некоторой вертикальной плоскости; обозначим ее через H . Очевидно, что

$$\vec{\tau} \parallel H, \vec{v} \parallel H, \quad (3.31)$$

ввиду неколлинеарности векторов $\vec{\tau}$ и $\vec{v}$ они образуют базис в плоскости H .

Полученный выше результат, относящийся к траекториям почвенных частиц, справедлив и при более широких исходных предположениях, чем те, которые положены в основу предыдущих рассуждений. Действительно, рассмотрим уравнение

$$m\vec{s}\vec{\tau} + \frac{mv^2}{\rho}\vec{v} = m\vec{g} + N\vec{n} - (fN + \lambda mv^2)\vec{\tau}. \quad (3.32)$$

Оно отличается от (3.24) тем, что в (3.32) приняты во внимание и приложенные к частице гравитационные силы. Их равнодействующая равна $m\vec{g}$, где $\vec{g}$ — вектор ускорения свободного падения материальной частицы единичной массы. Он компланарен вертикальной плоскости H , в которой расположен $\vec{\tau}$ и $\vec{v}$, значит

$$\vec{\tau} \times \vec{g} = 0. \quad (3.33)$$

Из (3.33) видно, что умножение обеих частей (3.32) на $\vec{\tau} \times \vec{v}$ снова приводит к равенству (3.29), следовательно, траектории почвенных комков по рабочей поверхности рыхлительной лапы и вообще по цилиндрической рыхлящей рабочей поверхности будут в любом случае ее геодезические.

3.4. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПОЧВЕННЫХ ЧАСТИЦ ПО РАБОЧЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

В плоскости H введем прямоугольную правую систему координат xOy , неподвижную относительно рыхлительной лапы; начало O совмещено с точкой M_0 , а положительный луч Oy^+ оси ординат направлен вертикально вверх. Тем самым однозначно определен луч Ox^+ . Он направлен в сторону выпуклости направляющей L . В силу условий квазистационарности рабочего процесса (п. 2.2.3) система xOy инерциальна.

Обозначим через M_s текущую (т. е. имеющую криволинейную абсциссу $s=s(t)$) точку траектории L . Положим

$$\alpha = \alpha(s) = \angle(Ox^+, \vec{\tau}(s))$$

(см. п. 1.2.5) и рассмотрим направленный вертикально вниз единичный вектор $\vec{g}^0$. Он компланарен плоскости H и допускает поэтому разложение по базису $(\vec{\tau}, \vec{v})$ (см. п. 1.1.4), т. е. представим в виде

$$\vec{g}^0 = \lambda \vec{\tau} + \mu \vec{v}, \quad (3.34)$$

где λ и μ — его проекции на числовые оси, ортами которых служат $\vec{\tau}$ и $\vec{v}$. Легко видеть, что (рис. 15)

$$(\vec{g}^0; \vec{\tau}) = \frac{\pi}{2} + \alpha,$$

$$(\vec{g}^0; \vec{v}) = \pi - \alpha,$$

следовательно,

$$\lambda = |\vec{g}^0| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha, \quad (3.35)$$

$$\mu = |\vec{g}^0| \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha. \quad (3.36)$$

Из (3.34) ... (3.36) следует, что

$$\vec{g}^0 = -(\vec{\tau} \sin \alpha + \vec{v} \cos \alpha), \quad (3.37)$$

значит

$$\vec{g} = -g(\vec{\tau} \sin \alpha + \vec{\nu} \cos \alpha), \quad (3.38)$$

где $g \approx 9,81$ м/с². На основании (3.38) равенство (3.32) принимает вид

$$m\ddot{s}\vec{\tau} + \frac{mv^2}{\rho}\vec{\nu} = -mg(\sin \alpha \cdot \vec{\tau} + \cos \alpha \cdot \vec{\nu}) + N\vec{n} - (fN + \lambda mv^2)\vec{\tau}. \quad (3.39)$$

Траектория L почвенного комка, движение которого описывается уравнением (3.39), является геодезической линией поверх-

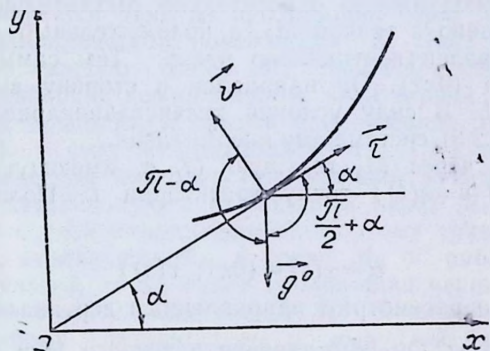


Рис. 15

ности S . Поэтому в каждой точке кривой L , т. е. в течение всего движения

$$\vec{n} = \vec{\nu}. \quad (3.40)$$

В силу (3.40), соотношение (3.39) обретает форму

$$m\ddot{s}\vec{\tau} + \frac{mv^2}{\rho}\vec{\nu} = -mg(\sin \alpha \cdot \vec{\tau} + \cos \alpha \cdot \vec{\nu}) + N\vec{\nu} - (fN + \lambda mv^2)\vec{\tau} \quad (3.41)$$

или, что то же,

$$m\ddot{s}\vec{\tau} + \frac{mv^2}{\rho}\vec{\nu} = (-mg \sin \alpha - fN - \lambda mv^2)\vec{\tau} + (-mg \cos \alpha + N)\vec{\nu}. \quad (3.42)$$

Ввиду неколлинеарности векторов $\vec{\tau}$ и $\vec{\nu}$ любое соотношение вида $a_1\vec{\tau} + b_1\vec{\nu} = a_2\vec{\tau} + b_2\vec{\nu}$, где a_1 , a_2 , b_1 и b_2 — скаляры, эквивалентно совокупности двух равенств

$$\begin{cases} b_1 = b_2, \\ a_1 = a_2, \end{cases}$$

Отсюда следует, что уравнение (3.42) равносильно (так как $\ddot{s} = \ddot{v}$) системе

$$m\ddot{v} = -mg \sin \alpha - fN - \lambda mv^2, \quad (3.43)$$

$$\frac{mv^2}{\rho} = -mg \cos \alpha + N. \quad (3.44)$$

В ней ρ и α связаны соотношением $\rho = \left(\frac{dx}{ds}\right)^{-1}$ (см. п. 1.2.9).

Поэтому полной системой дифференциальных уравнений, описывающих движение почвенной частицы по рабочей поверхности рыхлительной лапы, будет

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = -mg \sin \alpha - fN - \lambda mv^2, \end{cases} \quad (3.45)$$

$$\begin{cases} \frac{mv^2}{\rho} = -mg \cos \alpha + N, \end{cases} \quad (3.46)$$

$$\begin{cases} \rho = \left(\frac{dx}{ds}\right)^{-1} \end{cases} \quad (3.47)$$

или

$$\begin{cases} m\ddot{s} = -mg \sin \alpha - fN - \lambda m\dot{s}^2, \end{cases} \quad (3.48)$$

$$\begin{cases} \frac{m\dot{s}^2}{\rho} = -mg \cos \alpha + N, \end{cases} \quad (3.49)$$

$$\begin{cases} \rho = \left(\frac{dx}{ds}\right)^{-1}, \end{cases} \quad (3.50)$$

где g , f , λ , $m = \text{const} > 0$, α , ρ , v и N — функции.

Система (3.45)...(3.47) (или, что равносильно, (3.48)—(3.49)) состоит из трех независимых друг от друга уравнений, содержащих четыре функции, следовательно, если одна из них задана, то остальные три могут быть определены. Выбор задаваемой функции зависит от проблемы, для исследования которой будут использованы соотношения (3.45)...(3.47).

3.5. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДИНАМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ РАБОЧЕГО ОРГАНА С ПОЧВОЙ

Полученная система уравнений позволяет ставить и решить целый ряд задач, относящихся к взаимодействию рыхлительной лапы с почвой во время рабочего процесса. Рассмотрим две наиболее важные из них. Назовем их прямой и обратной основ-

ными задачами динамического взаимодействия рыхлительной лапы с почвенной массой. Они формулируются следующим образом.

Прямая основная задача. Пусть задана форма рыхлительной лапы, т. е. ее направляющая, вследствие чего траектория почвенного комка известна (ею будет, как доказано в п. 3.3.3, проходящая через M_0 направляющая поверхности S), а $\alpha = \alpha(s)$ и $\rho = \rho(s)$ — функции криволинейной абсциссы s , заданные на всей дуге L . В системе (3.45)...(3.46) искомыми функциями будут поэтому v и N . Требуется найти, следовательно, распределение (т. е. закон изменения) линейных скоростей частиц почвы при их перемещении по рабочей поверхности рыхлительной лапы и соответствующие значения нормального давления комков на поверхность S . Эти законы распределения выразятся формулами вида $v = v(s)$ и $N = N(s)$, позволяющими вычислить: 1) линейную скорость комка, находящегося на своей траектории, в точке с криволинейной абсциссой s ; 2) оказываемое им в данной точке нормальное давление на рабочую поверхность.

Обратная основная задача. Пусть на отрезке $[0; l]$ определена функция $N(s)$. Требуется найти направляющую L длины l (т. е. форму рабочей поверхности лапы), для которой законом распределения нормальных давлений почвенной частицы на поверхность S служит функция $N(s)$. Эта проблема представляет собой задачу аналитического конструирования рабочих поверхностей, обладающих заранее заданными динамическими свойствами. Она является, следовательно, проблемой оптимизации параметров рыхлительной лапы. Большое прикладное значение этой задачи очевидно. Она рассматривается в п. 3.3.7.

Можно рассматривать и другие проблемы определения рабочих поверхностей, имеющих заранее заданные свойства. Так, можно искать поверхность S , для которой законом распределения линейных скоростей движущихся по ней почвенных комков будет заданная функция криволинейной абсциссы s .

3.6. ПРЯМАЯ ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА

В системе (3.45)...(3.46) α и ρ — функции аргумента s , а v и $\frac{dv}{dt}$ зависят от переменной t . Покажем, что v и $\dot{v}$ выражаются через s . Тогда все входящие в уравнения (3.45) и (3.46) функции будут зависеть от одного и того же аргумента.

Согласно сказанному в п. 3.3.3, закон движения почвенной частицы по рабочей поверхности рыхлительной лапы имеет вид

$$s = f(t); \quad (3.51)$$

здесь $f(t) \in C^1$, причем $f(t)$ строго возрастает. Отсюда следует, что равенство (3.51) разрешимо относительно t , т. е.

$$t = g(s), \quad (3.52)$$

где g — обратная к f функция; при этом

$$g \in C^1 \quad (3.53)$$

на основании теоремы о дифференцируемости обратной функции. В силу (3.52) соотношение $v = v(t)$ преобразуется следующим образом:

$$v = v(g(s)). \quad (3.54)$$

Отсюда вытекает, что линейная скорость v почвенного комка при его движении по рабочей поверхности представима и в виде функции криволинейной абсциссы s . Там, где это не может стать причиной неясности, будем писать $v(s)$ вместо правой части (3.53) и под v подразумевать $v(s)$, если аргументом служит s .

Из (3.35), (3.53), (3.54), (3.18) и теоремы о производной сложной функции следует, что $v(s) \in C^1$, причем

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dv^2}{ds}. \quad (3.55)$$

На основании (3.55) система (3.45)...(3.46) равносильна

$$\frac{1}{2} m \frac{dv^2}{ds} = -mg \sin \alpha - fN - \lambda mv^2, \quad (3.56)$$

$$\frac{mv^2}{\rho} = -mg \cos \alpha + N, \quad (3.57)$$

где аргументом каждой функции служит s .

В случае прямой задачи α и ρ заданы, следовательно, неизвестными в системе (3.56)...(3.57) являются v и N . Образую линейную комбинацию уравнений (3.56) и (3.57) с коэффициентами 1 и f , получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{1}{2} \frac{dv^2}{ds} + f \frac{v^2}{\rho} = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) - \lambda v^2, \quad (3.58)$$

содержащее только искомую функцию v . Чтобы привести его к нормальной форме, введем угол трения почвы о рабочую поверхность рыхлительной лапы. Обозначим его величину через φ . Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi = f. \quad (3.59)$$

В силу (3.59)

$$\sin \alpha + f \cos \alpha = \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}. \quad (3.60)$$

На основании (3.60) уравнение (3.58) примет вид

$$\frac{dv^2}{ds} + 2 \left(\lambda + \frac{f}{\rho(s)} \right) v^2 = -\frac{2g}{\cos \varphi} \sin(\varphi + \alpha(s)). \quad (3.61)$$

В уравнение (3.61) входят, помимо v , только функции $\alpha(s)$ и $\rho(s)$, однозначно определяемые заданием направляющей ли-

нии; оно содержит также, кроме g , лишь постоянные f , $\varphi = \text{arctg} f$ и λ , с помощью которых описываются силы сопротивления перемещению комков почвы. Отсюда следует, что распределение линейных скоростей почвенных частиц, перемещающихся по рабочей поверхности рыхлительной лапы во время выполняемого ею рабочего процесса, зависит только от формы этой поверхности, и параметров, характеризующих диссипацию энергии движущихся частиц.

Соотношение (3.51) — линейное относительно v^2 дифференциальное уравнение первого порядка. Для упрощения записей положим

$$p(s) = \alpha \left(\lambda + \frac{f}{p(s)} \right), \quad (3.62)$$

$$q(s) = -\frac{2g}{\cos \varphi} \sin(\varphi + \alpha(s)). \quad (3.63)$$

Тогда равенство (3.61) примет форму

$$\frac{dv^2}{ds} + p(s)v^2 = q(s). \quad (3.64)$$

Чтобы установить начальное условие, которому удовлетворяет функция $v(s)$ при $s=0$, примем во внимание следующее. Из условий квазистационарности следует, что до соударения с поверхностью S скорость почвенной частицы в системе координат K равна $-\vec{v}_0$; вектор $\vec{v}_0$ компланарен плоскости направляющей L . При столкновении комка с рабочей поверхностью S нормальная к S составляющая его скорости относительно лапы обращается в нуль, а касательная к S и, следовательно, к линии L составляющая сохраняется, становясь начальной скоростью его дальнейшего движения. Поэтому (см. рис. 15)

$$v|_{s=0} = V_0 \cos \alpha(0), \quad (3.65)$$

следовательно, ввиду неотрицательности обеих частей (3.65)

$$v^2|_{s=0} = v_0^2 \cos^2 \alpha(0). \quad (3.66)$$

Решение линейного дифференциального уравнения

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (3.67)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y|_{x=0} = y_0 \quad (3.68)$$

дается формулой

$$y = e^{-\int_{x_0}^x q(\xi) d\xi} \left[y_0 + \int_{x_0}^x q(\xi) e^{\int_{x_0}^{\xi} p(\tau) d\tau} d\xi \right] \quad (3.69)$$

(ξ и ε — переменные интегрирования) [7; 10; 16; 20]. Сопоставляя соотношения (3.64), (3.66) и (3.67)...(3.69), находим

$$v^2 = e^{-\int_0^s p(\tau) d\tau} \left[v_0^2 \cos^2 \alpha(0) + \int_0^s q(\xi) e^{\int_0^{\xi} p(\tau) d\tau} d\xi \right]. \quad (3.70)$$

Приведем правую часть (3.70) к окончательному виду. В силу (3.62)

$$\int_0^{\varepsilon} p(\varepsilon) d\varepsilon = 2 \int_0^{\varepsilon} \left(\lambda + \frac{f}{p(\varepsilon)} \right) d\varepsilon = 2 \left(\lambda \varepsilon + f \int_0^{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{p(\varepsilon)} \right). \quad (3.71)$$

Из (3.47) вытекает, что

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{p(\varepsilon)} = \int_0^{\varepsilon} \frac{d\alpha(\varepsilon)}{\frac{d\alpha(\varepsilon)}{d\varepsilon}} d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon} d\alpha(\varepsilon) = \alpha(\varepsilon) - \alpha(0), \quad (3.72)$$

следовательно,

$$\int_0^{\varepsilon} p(\varepsilon) d\varepsilon = 2 [\lambda \varepsilon + f \alpha(\varepsilon)] - 2 f \alpha(0). \quad (3.73)$$

На основании (3.63), (3.70) и (3.73)

$$\begin{aligned} v^2 = e^{-2(\lambda s + f\alpha(s)) - 2f\alpha(0)} & \left[v_0^2 \cos^2 \alpha(0) - \frac{2g}{\cos \varphi_1} \int_0^s e^{2[\lambda \varepsilon + \lambda \alpha(\varepsilon) - 2f\alpha(0)]} \times \right. \\ & \times \sin(\varphi_1 + \alpha(\varepsilon)) d\varepsilon \left. \right] = e^{-2(\lambda s + \lambda \alpha(s))} \left[v_0^2 e^{2f\alpha(0)} \cos^2 \alpha(0) - \right. \\ & \left. - \frac{2g}{\cos \varphi_1} \int_0^s e^{2[\lambda \varepsilon + f\alpha(\varepsilon)]} \sin(\varphi_1 + \alpha(\varepsilon)) d\varepsilon \right]. \quad (3.74) \end{aligned}$$

В большинстве случаев второе слагаемое диссипативной функции (3.22) по абсолютной величине пренебрежимо мало по сравнению с первым. Поэтому в (3.74) можно положить, сохраняя высокую точность результата, $\lambda=0$. Формула (3.74) примет в этом случае вид

$$v^2 = e^{-2f\alpha(s)} \left[v_0^2 e^{2f\alpha(0)} \cos^2 \alpha(0) - \frac{2g}{\cos \varphi_1} \int_0^s e^{2f\alpha(\varepsilon)} \sin(\varphi_1 + \alpha(\varepsilon)) d\varepsilon \right], \quad (3.75)$$

откуда (так как $v \geq 0$)

$$v = e^{-f\alpha(s)} \left[v_0^2 e^{2f\alpha(0)} \cos^2 \alpha(0) - \frac{2g}{\cos \varphi_1} \int_0^s e^{2f\alpha(\xi)} \sin(\varphi_1 + \alpha(\xi)) d\xi \right]^{1/2}. \quad (3.76)$$

Правая часть (3.76) выражает закон распределения линейных скоростей почвенных частиц вдоль их траекторий.

Из (3.44) и (3.75) вытекает следующая общая формула для вычисления нормального давления почвы на рабочую поверхность рыхлительной лапы во время рабочего процесса:

$$N = m \left\{ g \cos \alpha(s) + \frac{e^{-2f\alpha(s)}}{\rho} \left[v_0^2 e^{2f\alpha(0)} \cos^2 \alpha(0) - \frac{2g}{\cos \varphi_1} \int_0^s e^{2f\alpha(\xi)} \sin(\varphi_1 + \alpha(\xi)) d\xi \right] \right\}. \quad (3.77)$$

3.7. СЛУЧАЙ РЫХЛИТЕЛЬНЫХ ЛАП КРУГОВОГО ПРОФИЛЯ

Пусть рабочая поверхность S рыхлительной лапы представляет собой часть боковой поверхности прямого кругового цилиндра, ограничена двумя его образующими и двумя направляющими (т. е. L — дуга окружности). Будем говорить в этом случае о рыхлительной лапе кругового профиля; она отличается высокой технологичностью изготовления, вследствие чего значительная часть применяемых для обработки почвы подкапывающих рабочих органов и рыхлительных лап обладает профильной линией в виде дуги окружности. Применительно к такой рабочей поверхности входящий в (3.75) и (3.77) интеграл выражается через элементарные функции. Ниже выводятся формулы, позволяющие вычислить v и N в этом случае.

Для направляющих указанного вида зависимость между α и s может быть получена из соотношений (L — дуга окружности; Q — ее центр; M — точка соударения почвенной частицы с рабочей поверхностью (M_0 служит началом отсчета криволинейной абсциссы s на линии L); $\bar{M}$ — текущая точка кривой L):

$$|QM_0| = R, \quad (3.78)$$

$$|\bar{M}_0\bar{M}| = s. \quad (3.79)$$

$$(Ms) \perp (QM), \quad (3.80)$$

$$(M_0B_0) \perp (QM_0), \quad (3.81)$$

$$\widehat{AMC} = \alpha(s), \quad (3.82)$$

$$\widehat{A_0M_0C_0} = \alpha(0) = \alpha_0, \quad (3.83)$$

$$(MB) \parallel (M_0B_0). \quad (3.84)$$

Таким образом, (MC) и (M_0B_0) — касательные к L в точках M и M_0 соответственно, $\widehat{AMC}$ — текущее значение функции $\alpha = \alpha(s)$,

$\widehat{A_0M_0B_0}$ — ее значение при $s=0$.

В силу аддитивности величин углов

$$\widehat{AMC} = \widehat{AMB} + \widehat{BMC}. \quad (3.85)$$

Из (3.80), (3.81), (3.83), (3.84) и теорем об углах со взаимно перпендикулярными и взаимно параллельными сторонами следует, что

$$\widehat{BMC} = \widehat{M_0QM}, \quad (3.86)$$

$$\widehat{AMB} = \widehat{A_0M_0B_0}. \quad (3.87)$$

На основании (3.78), (3.79) и соотношения между величиной центрального угла окружности и длиной стягиваемой им дуги

$$|\widehat{M_0M}| = R \cdot \widehat{M_0QM}. \quad (3.88)$$

Вследствие (3.79) и (3.87)

$$\widehat{M_0QM} = \frac{s}{R}. \quad (3.89)$$

Из (3.82), (3.83), (3.85), (3.86), (3.87) и (3.89) вытекает, что

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{s}{R}. \quad (3.90)$$

На основании (3.75) и (3.90)

$$v^2 = e^{-2f\left(\alpha_0 + \frac{s}{R}\right)} \left[v_0^2 e^{2f\alpha_0} \cos^2 \alpha_0 - \frac{2g}{\cos \varphi} e^{2f\alpha} \int_0^s e^{\frac{2f}{R}\xi} \sin\left(\varphi + \alpha_0 + \frac{\xi}{R}\right) d\xi \right] = -e^{-\frac{2f}{R}s} \left[v_0^2 \cos^2 \alpha - \frac{2g}{\cos \varphi} \int_0^s e^{\frac{2f}{R}\xi} \sin\left(\varphi + \alpha_0 + \frac{\xi}{R}\right) d\xi \right]. \quad (3.91)$$

Введем в (3.91) новую переменную интегрирования u , связанную с ξ соотношением

$$u = \varphi + \alpha + \frac{\xi}{R}, \quad (3.92)$$

откуда

$$\xi = R(u - \varphi - \alpha_0), \quad (3.93)$$

$$d\xi = R du. \quad (3.94)$$

В силу (3.92) пределы интегрирования по u равны $\varphi + \alpha_0$ и $\varphi + \alpha_0 + \frac{s}{R}$, вследствие чего равенство (3.91) примет вид

$$v^2 = e^{-\frac{2f}{R}s} \left[v_0^2 \cos^2 \alpha_0 - \frac{2Rg}{\cos \varphi} e^{-2f(\varphi + \alpha_0)} \int_{\varphi + \alpha_0}^{\varphi + \alpha + \frac{s}{R}} e^{2fu} \sin u du \right]. \quad (3.95)$$

Для приведения соотношения (3.95) к простейшей форме воспользуемся тем, что

$$\int e^{px} \sin x dx = \frac{e^{px}}{p^2 + 1} (p \sin x + \cos x). \quad (3.96)$$

Из (3.95) и (3.96) следует, что

$$v^2 = e^{-\frac{2f}{R}s} v_0^2 \cos^2 \alpha_0 - \frac{2Rg}{(4f^2 + 1) \cos \varphi} \left\{ 2f \sin \left(\varphi + \alpha + \frac{s}{R} \right) - \cos \left(\varphi + \alpha_0 + \frac{s}{R} \right) - e^{-\frac{2f}{R}s} [2f \sin (\varphi + \alpha_0) - \cos (\varphi + \alpha_0)] \right\}. \quad (3.97)$$

Формула (3.97) выражает закон распределения линейных скоростей почвенных частиц при их движении по рабочей поверхности рыхлительной лапы кругового профиля во время совершаемого ею рабочего процесса. Соответствующее распределение нормальных давлений дается равенством

$$N = mg \cos \left(\alpha_0 + \frac{s}{R} \right) + e^{-\frac{2f}{R}s} \frac{mv_0^2}{R} \cos^2 \alpha_0 - \frac{2mg}{(4f^2 + 1) \cos \varphi} \left\{ 2f \sin \left(\varphi + \alpha_0 + \frac{s}{R} \right) - \cos \left(\varphi + \alpha_0 + \frac{s}{R} \right) - e^{-\frac{2f}{R}s} [2f \sin (\varphi + \alpha_0) - \cos (\varphi + \alpha_0)] \right\}. \quad (3.98)$$

3.8. ОБРАТНАЯ ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА

Исключая из системы (3.56)–(3.57) линейную скорость v и полагая $\lambda=0$ (это оправдано малостью диссипативных сил, вызванных сопротивлением воздуха, по сравнению с силами инерции, гравитационными силами и силами сухого трения), получим

$$\frac{d}{ds} [p(mg \cos \alpha - N)] = 2(mg \sin \alpha + fN). \quad (3.99)$$

Назовем соотношение (3.99) дифференциальным уравнением обратной основной задачи. Пусть уравнением кривой L , к которой относятся α , s и ρ , служит $y=y(x)$;

тогда α , s и ρ выражаются через y . Отсюда следует, что если заданы функции N и относящиеся к линии L начальные условия (например, $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$, где $y_0, y'_0 = \text{const} \in R$), то уравнение (3.99) позволяет однозначно определить линию L . Пользуясь им, будем искать плоскую кривую L класса C^2 , обладающую тем свойством, что если она — направляющая линии цилиндрической рабочей поверхности S , то тяговое сопротивление, испытываемое рыхлительной лапой во время совершаемого технологического процесса, а также абразивный износ, производимый почвенными комками при движении по данной поверхности, минимальны. Это имеет место при $N=\text{const}=0$. В производственных условиях точное выполнение равенства невозможно; рыхлящая лапа, профильная линия которой найдена исходя из этого условия, будет испытывать в течение рабочего процесса малое, но отличное от нуля, давление почвенной массы. Уравнение (3.99) примет в этом случае вид

$$\frac{d}{ds} (mg \rho \cos \alpha) = 2mg \sin \alpha,$$

или, что равносильно,

$$d(\rho \cos \alpha) = 2 \sin \alpha ds. \quad (3.100)$$

Для нахождения линии, определяемой дифференциальным уравнением (3.100), введем следующим образом неподвижную прямоугольную правую систему координат xOy в плоскости этой кривой: началом отсчета служит точка соударения почвенной частицы с рабочей поверхностью, ось Oy вертикальна, а ее положительный луч направлен вверх; тем самым однозначно определены ось абсцисс и ее положительное направление. Уравнение линии L в системе xOy имеет вид $y=y(x)$, где $y(x) \in C^2$, причем функция $y(x)$ строго возрастает и строго выпукла вниз. Отсюда

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}. \quad (3.101)$$

$$y' > 0. \quad (3.102)$$

На основании (3.101) и сказанного в п. 1.2.5

$$\alpha = \arctg y'. \quad (3.103)$$

В силу (3.101)–(3.103)

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad (3.104)$$

$$\sin \alpha = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}. \quad (3.105)$$

Из (1.58) и (1.142) вытекает, что

$$ds = \sqrt{1+y'^2} dx, \quad (3.106)$$

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}. \quad (3.107)$$

На основании (3.104) ... (3.107)

$$\sin \alpha ds = y' dx = dy, \quad (3.108)$$

$$\rho \cos \alpha = \frac{1 + y'^2}{y''}. \quad (3.109)$$

В силу (3.108) и (3.109) дифференциальное уравнение (3.100) равносильно

$$d \left(\frac{1 + y'^2}{y''} \right) = 2 dy. \quad (3.110)$$

Интегрирование обеих частей равенства (3.110) приводит к соотношению

$$\frac{1 + y'^2}{y''} = 2(y + C_1^1)$$

(постоянная интегрирования взята в виде $2C_1^1$) или

$$\frac{y''}{1 + y'^2} = \frac{1}{2(y + C_1^1)}. \quad (3.111)$$

Умножение обеих частей (3.111) на $2y'$ может привести лишь к появлению постороннего решения, получаемого из уравнения $y' = 0$, т. е.

$$y = \text{const}. \quad (3.112)$$

Линия (3.112) не удовлетворяет условию задачи, так как прямая не может быть направляющей цилиндра. Поэтому указанное умножение допустимо; оно дает дифференциальное уравнение

$$\frac{2y'y''}{1 + y'^2} = \frac{y'}{y + C_1^1}. \quad (3.113)$$

Очевидно, что

$$(\ln(1 + y'^2))' = \frac{2y'y''}{1 + y'^2}, \quad (3.114)$$

$$(\ln(y + C_1^1))' = \frac{y'}{y + C_1^1}. \quad (3.115)$$

Из (3.114) следует, что (3.113) представимо в виде

$$(\ln(1 + y'^2))' = (\ln(y + C_1^1))'. \quad (3.116)$$

Интегрируя, находим

$$\ln(1 + y'^2) = \ln(y + C_1^1) + \ln C_2^1 = \ln C_2^1 (y + C_1^1); \quad (3.117)$$

произвольная постоянная интегрирования взята в виде $\ln C_2^1$, откуда $1 + y'^2 = C_2^1 (y + C_1^1)$, следовательно,

$$y' = \sqrt{C_2^1 y + C_1^1 C_2^1 - 1}. \quad (3.118)$$

Положим

$$C_1^1 C_2^1 - 1 = \bar{C}_1. \quad (3.119)$$

В силу (3.119) дифференциальное уравнение (3.118) принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{C_2^1 y + \bar{C}_1}. \quad (3.120)$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dy}{\sqrt{C_2^1 y + \bar{C}_1}} = dx,$$

откуда

$$\frac{2}{C_2^1} \sqrt{C_2^1 y + \bar{C}_1} = x + C_3^1,$$

следовательно,

$$y = \frac{1}{4} C_2^1 (x + C_3^1)^2 - \frac{\bar{C}_1}{C_2^1}. \quad (3.121)$$

Введем новые постоянные A , B и C , полагая

$$A = \frac{1}{4} C_2^1, \quad (3.122)$$

$$B = \frac{1}{2} C_2^1 C_3^1, \quad (3.123)$$

$$C = \frac{1}{4} C_2^1 C_3^1 - \frac{\bar{C}_1}{C_2^1}. \quad (3.124)$$

В силу (3.122) ... (3.123) уравнение (3.121) примет вид

$$y = Ax^2 + Bx + C. \quad (3.125)$$

Тем самым установлено, что профильной кривой (или, что то же, направляющей линией), при которой рыхлительная лапа испытывает во время выполняемого ею технологического процесса наименьшее нормальное давление почвы и минимальный абразивный износ, служит парабола. Это установлено и экспериментально [4].

Из свойств параболы [6] следует, что в уравнении (3.125) свободный член C зависит только от положения системы отсчета и не

имеет отношения к форме кривой L . В соответствии с выбором системы координат xOy

$$y(0) = 0. \quad (3.126)$$

На основании (3.125) и (3.126)

$$C = 0. \quad (3.127)$$

В силу (3.125) и (3.127)

$$y = Ax^2 + Bx, \quad (3.128)$$

где A и B определяют форму параболы. Они могут быть выражены через геометрические параметры рыхлительной лапы. Действительно, пусть α_0 — величина угла входа лапы в почву. Тогда

$$y'(0) = \operatorname{tg} \alpha_0. \quad (3.129)$$

Из (3.128) и (3.129) следует, что

$$B = \operatorname{tg} \alpha_0. \quad (3.130)$$

Наконец, пусть вылет носка равен x_0 , а высота заднего обреза лапы в плоскости кривой L равна y_0 . Тогда

$$y(x_0) = y_0. \quad (3.131)$$

На основании (3.128), (3.130) и (3.131)

$$Ax_0^2 + x_0 \operatorname{tg} \alpha_0 = y_0,$$

откуда

$$A = \frac{1}{x_0^2} (y_0 - x_0 \operatorname{tg} \alpha_0). \quad (3.132)$$

В силу (3.128), (3.130) и (3.132) уравнением направляющей кривой будет

$$y = \frac{1}{x_0^2} (y_0 - x_0 \operatorname{tg} \alpha_0) x^2 + x \operatorname{tg} \alpha_0. \quad (3.133)$$

Формулой (3.133) задается профильная линия, при которой рыхлительная лапа обладает заданными размерами, заранее заданным углом входа в почву и испытывает во время работы наименьшее нормальное давление почвы и минимальный абразивный износ.

Глава 4

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Достоверность выведенных формул (см. гл. 3) для определения оптимального профиля рабочих органов почвообрабатывающих машин минимального тягового сопротивления проверяли путем сопоставления параметров лобового профиля рыхлительной лапы чизеля-культиватора, найденных экспериментально, с теоретическими.

Ниже приводятся результаты экспериментально-теоретических исследований по обоснованию оптимального лобового профиля рыхлительной лапы чизеля-культиватора минимального тягового сопротивления для работы на повышенных скоростных режимах движения в зоне поливного хлопководства.

4.1. ЛОБОВОЙ ПРОФИЛЬ РЫХЛИТЕЛЬНОЙ ЛАПЫ

Многолетними исследованиями Всесоюзного института хлопководства (СоюзНИХИ) и других научно-исследовательских институтов, а также опытом передовых хозяйств установлено, что в зоне хлопководства наиболее эффективной системой предпосевной обработки почвы на засоленных землях по фону зяби и промывных поливов, а на землях с недостаточной влажностью после влагозарядковых поливов является предпосевное чизелевание с последующим боронованием и малованием. При этом создаются лучшие условия для получения дружных всходов и раннего накопления коробочек, в результате повышается урожай доморозных сборов и общий урожай.

Предпосевное чизелевание почвы проводится чизелями-культиваторами. Для глубокого рыхления без оборота пласта на чизель-культиватор устанавливают рыхлительные лапы, а для подрезания корней сорняков и сплошного поверхностного рыхления почвы — плоскорежущие лапы.

Рыхлительные лапы чизель-культиватора должны обеспечить качественное рыхление почвы при минимальном тяговом сопротивлении. Величина тягового сопротивления рыхлительных лап

зависит от следующих основных параметров: угла раствора груди β , угла ножевой части 2γ , ширины B , угла вхождения в почву α , формы лобового профиля. Основные параметры рыхлительной лапы чизеля-культиватора для работы в зоне хлопководства были исследованы в начале 80-х годов Р. И. Байметовым и М. Мирахматовым [4].

Лобовой профиль рыхлительной лапы — один из немаловажных ее параметров, оказывающих существенное влияние на ее тяговое сопротивление, поэтому правильный выбор лобового профиля намного уменьшает тяговое сопротивление лапы.

По исследованиям некоторых авторов [26, 27, 28, 29], профиль лобовой поверхности рабочего органа в форме логарифмической кривой создает минимальное тяговое сопротивление. Уравнение логарифмической кривой имеет вид

$$y = K \ln x + C,$$

где K — коэффициент, характеризующий кривизну логарифмической кривой; C — произвольная константа.

Тяговое сопротивление лапы будет минимальным, если в процессе работы удельное давление почвы по всей рабочей поверхности ее будет равномерным.

Удельное давление почвы на рыхлительную лапу во многом зависит от угла вхождения ее в почву. Для каждой глубины обработки почвы и скорости движения лапы есть свой оптимальный угол вхождения в почву. Поэтому лобовой профиль лапы был построен на основе выбора экспериментальным путем оптимального угла вхождения ее для каждого диапазона глубины обработки и скорости движения.

Экспериментальные исследования влияния угла вхождения в почву лапы на ее тяговое сопротивление в зависимости от глубины обработки и скорости движения проводили при постоянстве всех параметров лапы, кроме угла вхождения α . Для этого была изготовлена лапа со следующими параметрами, рекомендованными Р. И. Байметовым и М. Мирахматовым для работы на скоростях движения более 2,3 м/с в зоне хлопководства: угол раствора груди $\beta = 120^\circ$, угол ножевой части $2\gamma = 60^\circ$, ширина рыхлительной лапы $B = 50$ мм. При этих параметрах лапа имеет наименьшее тяговое сопротивление и наилучшие агротехнические показатели.

Лапа крепилась к специальной стойке, с помощью которой в процессе экспериментальных исследований устанавливалась под углом вхождения 30° ; 45° ; 60° ; 75° ; 90° и на различную глубину обработки.

Исследования проводились в почвенном канале при глубине хода лапы 4, 8, 12 и 16 см для четырех скоростей движения — 1,7; 2,2; 2,7; 3,3 м/с. Перед тензометрированием лапы в почвенном канале был подготовлен фон, близкий к полевым условиям.

Твердость и влажность почвы в почвенном канале были следующими:

Слой, см	Влажность, %	Твердость, МПа
0...5	15,0	1,08
5...10	16,7	1,69
10...15	17,6	1,72
15...20	18,3	1,83

Результаты тензометрирования были представлены в виде графиков зависимости тягового сопротивления от угла вхождения и глубины обработки при указанных скоростях движения.

Графические зависимости результатов опыта позволяют проследить влияние угла вхождения, глубины обработки и скорости движения рыхлительной лапы на ее тяговое сопротивление.

Тяговое сопротивление рыхлительной лапы с увеличением скорости движения и глубины обработки возрастало, а с увеличением угла вхождения сначала несколько уменьшалось, затем возрастало. Соединяющие точки на пунктирных линиях приняты нами за оптимальные углы вхождения для каждой скорости движения и глубины обработки.

Наименьшее тяговое сопротивление на повышенных скоростях движения (более 2,2 м/с) при глубине обработки $h = 12...16$ см отмечено при угле вхождения рыхлительной лапы $\alpha = 38...41^\circ$.

Пользуясь полученными данными, мы построили лобовой профиль рыхлительных лап, при котором обеспечивается минимальное тяговое сопротивление (рис. 16, а). Для каждой глубины $h = (4; 8; 12 \text{ и } 16 \text{ см})$ провели прямые горизонтальные линии. Выбрав произвольную точку O на нижней линии, соответствующую максимальной глубине хода рыхлительной лапы, последовательно провели прямые линии под оптимальными углами α_1 , α_2 , α_3 и α_4 к горизонту для каждой учетной глубины.

Лобовая часть рыхлительной лапы представлена в виде ломаной линии O, O_1, O_2, O_3 и O_4 . Если описать точки ломаной линии плавной кривой, то она окажется близко совпадающей с дугой окружности с радиусом R . Зная начальный α_0 и конечный α углы вхождения рыхлительной лапы, нетрудно получить математическую зависимость радиуса лобового профиля от глубины входа и углов вхождения.

Из рис. 16, б имеем $\angle OAB = \angle OBA$, следовательно, $\angle DAB =$

$$= \angle DBA = \delta = \frac{\alpha_a - \alpha_0}{2} \text{ и } \alpha = \frac{\alpha_a + \alpha_0}{2}. \text{ Имея далее в виду, что}$$

$$AB = \frac{h}{\sin \frac{\alpha_a + \alpha_0}{2}}, \text{ а } \tau = 90^\circ - \frac{\alpha_a - \alpha_0}{2}, \text{ получаем}$$

$$R = \frac{AB}{2\cos\tau} = \frac{h}{2\sin\left(\frac{\alpha_a + \alpha_0}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha_a - \alpha_0}{2}\right)},$$

после преобразования

$$R = \frac{h}{\cos\alpha_0 - \cos\alpha_a}. \quad (4.1)$$

Отсюда радиус лобового профиля лапы должен быть тем больше, чем больше глубина хода и меньше α_0 . Этот угол увеличива-

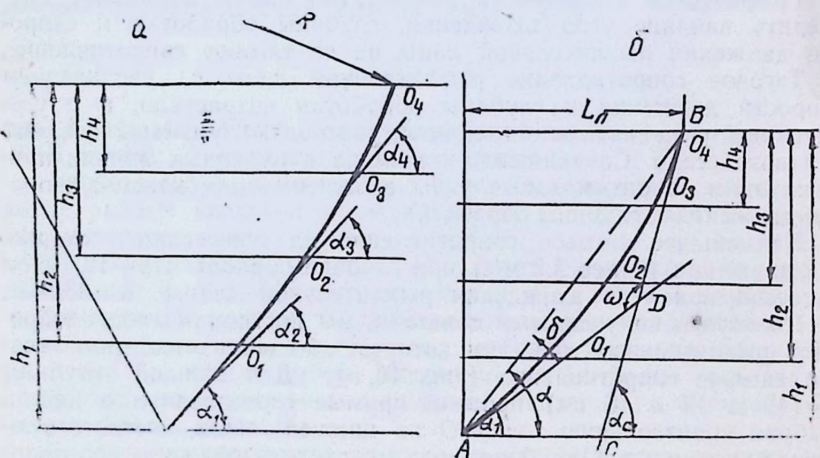


Рис. 16

ется с увеличением скорости движения, поэтому радиус кривой должен уменьшаться. Начальный угол вхождения α_0 для всех скоростей движения был принят равным $\alpha_0 = 40^\circ$.

Вместо дуги окружности предпочтительнее брать параболу, вылет которой L можно подсчитать по формуле

$$L = h \operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha_a - \alpha_0}{2}\right). \quad (4.2)$$

При известных значениях α_0 и α_a определяется угол ω между касательными AD и BD к кривой AB .

Оптимальные параметры для построения лобового профиля рыхлительной лапы, которые определены по формулам (4.1), (4.2) для различных скоростей, приведены ниже:

Показатель	Скорость движения, км/ч			
	6,2	8,1	10,0	12,3
α_0 , град	41	41	41	41
α_a , град	74	76	81	85
ω , град	147	145	140	136
R , мм	333	312	267	234
L , мм	104	96	88	81

Пользуясь этими параметрами, построили лобовой профиль рыхлительной лапы для различных скоростей движения (рис. 17). На рис. 17 приведена также форма лобового профиля лапы, построенная по уравнению (3.103) (см. гл. 3) при следующих

Интервал	Экспериментальные m_1	Теоретические $n \cdot p_1$	Уклонения $m_1 - n \cdot p_1$	$\frac{(m_1 - n \cdot p_1)^2}{n \cdot p_1}$
Y_1	0,8	0,94	-0,14	0,021
Y_2	1,7	2,06	-0,36	0,074
Y_3	2,7	3,38	-0,68	0,137
Y_4	3,9	4,90	-1,0	0,204
Y_5	5,2	6,60	-1,4	0,297
Y_6	6,7	8,50	-1,80	0,381
Y_7	8,4	10,58	-2,18	0,741
Y_8	10,5	12,86	-2,36	0,433
Y_9	13,1	15,34	-2,24	0,327
Y_{10}	18,0	18,0	0	0
Σ				2,62

значениях величин, входящих в формулу: глубина хода лапы $y_0 = h = 18$ см; угол входа лапы $\alpha_0 = 41^\circ$, вылет носка лапы $x_0 = L = 10$ см.

Для представления о большей или меньшей близости теоретически найденного лобового профиля (рис. 17, 1) рыхлительной лапы к эмпирическим (рис. 17, 3) применили один из наиболее употребительных критериев — критерий χ^2 (Пирсона).

Данные для определения критерия χ приведены в таблице.

При 9 степенях свободы и уровне значимости $q = 5\%$ находим табличную 3,32 [25].

Полученное нами значение $\chi^2 = 2,62$ лежит в области допустимых значений. Отсюда следует, что разница между теоретическими и эмпирическими данными незначима.

Используя определенные ранее оптимальные параметры (угол раствора груди $\beta = 120^\circ$, угол ножевой части $2\gamma = 60^\circ$, ширина $B = 50$ мм) и полученные в опыте данные, мы разработали экспериментальную рыхлительную лапу для работы на скоростях движения 2,2...2,3 м/с.

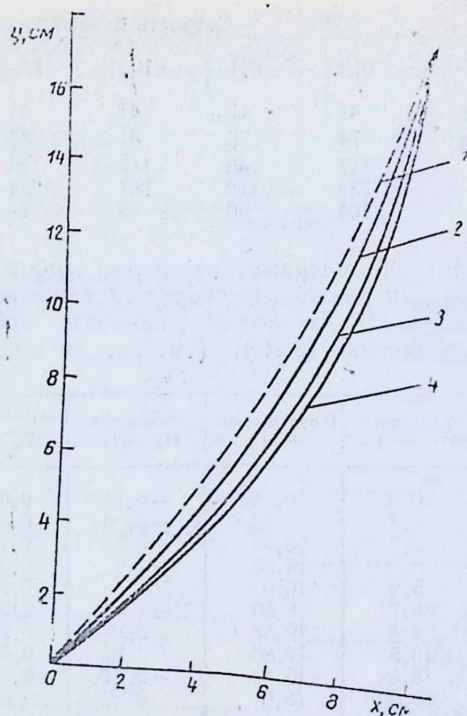


Рис. 17

Определены сравнительные энергетические показатели работы экспериментальной и существующей лап:

Показатель	При скорости движения, м/с			
	1,41	2,0	2,54	3,13
Для экспериментальной лапы (при глубине обработки 15,1 см)				
Горизонтальная составляющая $R_{\Gamma}, Н$	376,0	488,1	541,3	619,2
Вертикальная составляющая $R_{\nu}, Н$	172,0	177,1	181,1	183,0
Результирующая сила $R, Н$	406,0	515,0	579,0	644,1
Удельное сопротивление, даН/см ²	0,490	0,648	0,734	0,824
Для существующей лапы (при глубине обработки 14,8 см)				
Горизонтальная составляющая $R_{\Gamma}, Н$	407,7	487,7	597,0	671,8
Вертикальная составляющая $R_{\nu}, Н$	172,0	184,0	187,0	190,0
Результирующая сила $R, Н$	440,0	521,2	641,1	697,0
Удельное сопротивление, даН/см ²	0,625	0,723	0,957	0,997

Таким образом, у существующей рыхлительной лапы горизонтальная составляющая на 8...10% больше, чем у экспериментальной. Вертикальная составляющая тягового сопротивления обеих рыхлительных лап примерно одинакова.

Изучение удельного сопротивления рыхлительных лап показало, что с увеличением скорости движения удельное сопротивление у обеих рыхлительных лап увеличивается. Так, если при скорости 1,41 м/с удельное сопротивление у экспериментальной лапы равно 0,490 даН/см², то у существующей — 0,605 даН/см². Когда скорость движения возросла до 3,13 м/с, оно соответственно стало равным 0,824 и 0,997.

Тяговое сопротивление чизеля ЧКУ-4 с шириной захвата 2 м по двум сравниваемым рабочим органам оказалось следующим: у существующих при скорости 2,14 м/с — 6734,2 Н, при 3,12 м/с — 7510,0 Н, у экспериментальных — соответственно 5791,0 и 6198,5 Н. Удельное сопротивление при указанных скоростях движения 3367,1 и 3755,0 Н/м у серийных, 2895,6 и 3099,2 Н/м у экспериментальных.

Таким образом, тяговое сопротивление чизель-культиватора ЧКУ-4 с серийными рыхлительными лапами при скоростях движения 2,14 и 3,15 м/с на 943 и 1312 Н больше, чем при установке экспериментальных рабочих органов.

Качество рыхления почвы или рыхлящая способность рабочих органов при использовании экспериментальных скоростных рыхлительных лап на повышенных скоростях движения улучшалось на 7,6...13,4%.

Опыты показали, что чизель-культиватор с экспериментальными рабочими органами при работе на повышенных скоростях выдерживал заданную глубину обработки и имел лучшую устойчивость хода по глубине. Так, при скорости движения 3,33 м/с среднеквадратичное отклонение глубины обработки у него составило $\pm 1,39$ см, у чизель-культиватора с серийными рабочими органами $\pm 1,51$, коэффициент вариации глубины обработки 4,4 и 5,4%.

Удельное сопротивление на 1 м ширины захвата чизель-культиватора с экспериментальными рыхлительными лапами при скорости движения 3,15 м/с оказалось на 656 Н меньше, чем у обычных. При работе чизель-культиватора с экспериментальными лапами на повышенных скоростях движения степень крошения почвы улучшалась на 7,6...13,4%.

Рассмотрим технико-экономические данные об эффективности применения чизель-культиваторов со сравниваемыми рыхлительными лапами на повышенных скоростях движения:

Показатель	Серийные лапы	Экспериментальные лапы
Выработка за 1 ч сменного времени, га	2,08	3,16
Повышение производительности труда, %	—	52,0

Трудовые затраты на единицу работы, чел-ч/га	0,48	0,31
Снижение трудовых затрат, %		35,4
Эксплуатационные затраты, руб	2,79	1,58
Экономия на обработке, руб/га	—	1,15
Годовая экономия от применения одной машины, руб.	—	530,8

Данные показали, что по производительности чизель-культиватор ЧКУ-4 с экспериментальными рыхлительными лапами на послойной обработке почвы на повышенных скоростях движения превышал серийный на 52%, при этом трудовые затраты снижались на 35,4%. От внедрения скоростной рыхлительной лапы экономия на 1 га составляла 1,15 руб., годовая экономия на одну машину 530,8 руб.

Таким образом, применение чизель-культиватора ЧКУ-4 с экспериментальными рыхлительными лапами для послойной обработки почвы на повышенных скоростях движения значительно снижало затраты труда на единицу площади, сокращало сроки подготовки почвы к севу и положительно сказывалось на качестве обработки, что создавало наилучшие условия для роста и развития растений, способствовало увеличению урожая.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзерман М. А. Классическая механика. М.: Наука, 1980. 368 с.
2. Аппель П. Теоретическая механика. Т. 1. М.: Физматгиз, 1960. 516 с.
3. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432 с.
4. Байметов Р. И., Мирахматов М., Тухтакузиев А. Обработка почвы на повышенных скоростях движения в зоне хлопководства. Ташкент: Фан, 1985. С. 32.
5. Бюшнев С. С. Дифференциальная геометрия. М.: Л.: ГИТТЛ, 1940. 300 с.
6. Дубнов Я. С. Основы векторного исчисления. Т. 1. М.: ГИТТЛ, 1950. 368 с.
7. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1967. Т. 1. 704 с.; Т. 2. 672 с.
8. Лагалли М. Векторное исчисление. М.: Л.: ОНТИ, 1936. 344 с.
9. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики. Т. 2. М.: ГИТТЛ, 1955. 595 с.
10. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Л.: Изд-во ЛГУ, 1955. 656 с.
11. Норден А. П. Краткий курс дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1958. 244 с.
12. Петкевич В. В. Теоретическая механика. М.: Наука, 1981. 496 с.
13. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1964. 272 с.
14. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. М.: ГИТТЛ, 1956. 420 с.
15. Рудаков Г. М. Технологические основы механизации сева хлопчатника. Ташкент: Фан, 1974. С. 26.
16. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1953. 468 с.
17. Сулов Г. К. Теоретическая механика. М.: Л.: ОГИЗ, 1946. 656 с.
18. Татарinov Я. В. Лекции по классической динамике. М.: Изд-во МГУ, 1984. 296 с.
19. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М.: ИЛ, 1962. 352 с.
20. Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985. 448 с.
21. Фиников С. П. Курс дифференциальной геометрии. М.: ГИТТЛ, 1952. 344 с.
22. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматгиз, 1962. Т. 1. 608 с. Т. 2. 808 с.
23. Флайшер Н. М. К теории тягового сопротивления плуга//Механизация и электрификация соц. сел. хоз-ва. 1979. № 5. С. 46—50.

24. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.

25. Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. М.: Наука, 1965. С. 265...300, 465...495.

26. Хаджиев А. Х., Слободюк П. И. Выбор оптимальной формы бокового профиля лапы культиватора//Труды САИМЭ. Вып. 9. Ташкент, 1972. С. 179...182.

27. Короткевич П. С. О влиянии формы лезвия на сопротивление почвы резанию//Материалы научно-технического совета. Вып. 19. М.: ВИСХОМ, 1965. 203 с.

28. Демидко М. Е. Исследование влияния скорости на работу полольных лап культиваторов: Автореф. дис... канд. тех. наук. Киев, 1964.

29. Кириченко А. С. Экспериментальное исследование работы плоско-режущих рабочих органов почвообрабатывающих машин на повышенных скоростях//Труды НИИ механизации и электрификации с. х. Вып. 11. 1968. С. 66...73.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	7
ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ РАБОЧИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ РЫХЛИТЕЛЬНЫХ ЛАП	
1.1. Вспомогательные сведения	7
1.2. Некоторые свойства линий	18
1.3. Некоторые свойства поверхностей	56
1.3.1. Обозначения и вспомогательные сведения	56
1.3.2. Поверхности	58
1.4. Геодезические линии	80
1.5. Геометрические свойства цилиндрических рабочих поверхностей	93
ГЛАВА 2. СВЯЗЬ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ И СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПОЧВООБРАБАТЫВАЮЩЕЙ МАШИНЫ. КВАЗИИНЕРЦИАЛЬНОСТЬ СВЯЗАННОЙ С НЕЕ РАМОЙ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА	
2.1. Постановка вопроса	99
2.2. Средние значения параметров, характеризующих рабочие процессы	99
2.3. Условия квазиинерциальности подвижной системы отсчета, жестко связанной с рамой почвообрабатывающей машины	104
ГЛАВА 3. ДВИЖЕНИЕ ПОЧВЕННЫХ ЧАСТИЦ ПО РАБОЧЕЙ ПОВЕРХНОСТИ РЫХЛИТЕЛЬНОЙ ЛАПЫ. ОПТИМИЗАЦИЯ ЕЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ	
3.1. Обозначения и вспомогательные соотношения	106
3.2. Основные предположения	110
3.3. Траектории почвенных частиц по рабочей поверхности	111
3.4. Уравнения движения почвенных частиц по рабочей поверхности	115
3.5. Постановка задач динамического взаимодействия рабочего органа с почвой	117
3.6. Прямая основная задача	118
3.7. Случай рыхлительных лап кругового профиля	122
3.8. Обратная основная задача	124
ГЛАВА 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ	
4.1. Лобовой профиль рыхлительной лапы	129
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	137

**Рустам Исаевич Байметов,
Норберт Мозесович Флайшер**

**ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ РАБОЧИХ ОРГАНОВ
ПОЧВООБРАБАТЫВАЮЩИХ МАШИН**

*Утверждено к печати Ученым советом Среднеазиатского
научно-исследовательского института механизации и электрификации
сельского хозяйства, Среднеазиатским Отделением ВАСХНИЛ*

Редактор *Д. Э. Мангушова*
Художник *Е. Н. Владимиров*
Технический редактор *Н. А. Абдурахмонова*
Корректор *Т. В. Улиа*

ИБ № 4974

Сдано в набор 06.02.91. Подписано к печати 12.09.91. Формат 60×90^{1/16}. Бумага типографская № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 8,75. Уч.-изд. л. Тираж 500. Заказ 35. Цена 3 р. 90 к.

Издательство «Фан» АН РУз: Ташкент, 700047, ул. Гоголя, 70.
Типография Издательства «Фан» АН РУз: Ташкент, проспект М. Горького, 79.